<u>تمرين رقم 1 :</u>

أكتب باستعمال المكممات العبارات التالية و حدد قيمة حقيقة كل عبارة :

** لكل عدد صحيح طبيعي n ، يوجد عدد صحيح طبيعي m بحيث : $n = 2m$ $\quad (P)$

** يوجد عدد حقيقي M بحيث لكل عدد حقيقي x لدينا : $x \leq M$ $\quad (Q)$

** لكل عدد حقيقي m يوجد عدد حقيقي x بحيث $x^2 - mx + 1 = 0$ $\quad (R)$

<u>الجواب :</u>

** $(P) : (\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N}) : n = 2m$

** $(Q) : (\exists M \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) : x \leq M$

** $(R) : (\forall m \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R}) : x^2 - mx + 1 = 0$

<u>تمرين رقم 2 :</u>

حدد نفي العبارات التالية و حدد قيمة حقيقة كل منها :

1) $(P) : \sqrt{13} \geq \sqrt{5} + \sqrt{8}$

2) $(Q)(\exists x \in \mathbb{R}) : x^2 - x + 2 = 0$

3) $(R)(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}) : x < y$

4) $(S) : (\forall x \in \mathbb{R}) \quad \sqrt{1 + x^2} - |x| \geq 0$

5) $(T)(\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 > 0$

<u>الجواب :</u>

1) $(\neg P) : \sqrt{13} < \sqrt{5} + \sqrt{8}$

نقارن العددين بالمربعات : $\left(\sqrt{13}\right)^2 = 13$ و $\left(\sqrt{5} + \sqrt{8}\right)^2 = 13 + 2\sqrt{40}$ ومنه $\sqrt{5} + \sqrt{8} > \sqrt{13}$

إذن العبارة $(\neg P)$ صحيحة ومنه (P) خاطئة .

2) $(\neg Q)(\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 - x + 2 \neq 0$

نحسب مميز المعادلة : $\Delta = 1 - 8 = -7 < 0$ إذن المعادلة ليس لها حل

و بالتالي العبارة $(\neg Q)$ صحيحة ومنه (Q) خاطئة .

3) $(\neg R)(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}) : x \geq y$

العبارة (R) صحيحة (لأن لكل عدد حقيقي x يوجد عدد حقيقي $y = x + 1$ بحيث : $x < y$).

4) $(\neg S) : (\exists x \in \mathbb{R}) \quad \sqrt{1 + x^2} - |x| < 0$

العبارة (S) صحيحة لأن : (لكل عدد حقيقي x لدينا : $|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{1 + x^2}$)

5) $(\neg T)(\exists x \in \mathbb{R}) : x^2 \leq 0$

العبارة $(\neg T)$ صحيحة لأنه يوجد عدد حقيقي $x = 0$ بحيث : $0 \leq 0$ ومنه العبارة (T) عبارة خاطئة .

<u>تمرين رقم 3 :</u>

بين باستعمال الإستدلال بالمثال المضاد أن العبارة التالية خاطئة .

$$(P)(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall m \in \mathbb{N}^*) : \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{m} \in \mathbb{N}$$

<u>الجواب :</u>

** لنحدد نفي العبارة (P) نحصل على : $(\neg P)(\exists n \in \mathbb{N}^*)(\exists m \in \mathbb{N}^*) : \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{m} \notin \mathbb{N}$

نضع : $n = 1$ و $m = 2$. بما أن العددين يحققان العبارة $(\neg P)$ لأن : $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \notin \mathbb{N}$.

إذن $(\neg P)$ عبارة صحيحة ومنه (P) عبارة خاطئة .

تمرين رقم 4 :

بين باستعمال قانون الاستلزام المضاد للعكس أن :

** $(\forall x\in \mathbb{R})(\forall y\in \mathbb{R}) : x\neq 0 \Rightarrow \dfrac{x-y}{x+y}\neq -1$.

** $(\forall x\in \mathbb{R})(\forall y\in \mathbb{R}) : \left(xy\neq 0 \text{ و } x\neq y \Rightarrow \dfrac{x}{x^2+x+1}\neq \dfrac{y}{y^2+y+1}\right)$.

الجواب :

*** لكي نبين أن : $(\forall x\in \mathbb{R})(\forall y\in \mathbb{R}) : x\neq 0 \Rightarrow \dfrac{x-y}{x+y}\neq -1$

نبين أن : $(\forall x\in \mathbb{R})(\forall y\in \mathbb{R}) : \dfrac{x-y}{x+y}=-1 \Rightarrow x=0$.

ليكن x و y عددين حقيقين بحيث : $\dfrac{x-y}{x+y}=-1$ إذن $x-y=-x-y$ ومنه $2x=0$ و بالتالي : $x=0$

إذن : $(\forall x\in \mathbb{R})(\forall y\in \mathbb{R}) : \dfrac{x-y}{x+y}=-1 \Rightarrow x=0$ ومنه $(\forall x\in \mathbb{R})(\forall y\in \mathbb{R}) : x\neq 0 \Rightarrow \dfrac{x-y}{x+y}\neq -1$

*** لكي نبين أن : $(\forall x\in \mathbb{R})(\forall y\in \mathbb{R}) : \left(xy\neq 0 \text{ و } x\neq y \Rightarrow \dfrac{x}{x^2+x+1}\neq \dfrac{y}{y^2+y+1}\right)$

يكفي أن نبين أن : $(\forall x\in \mathbb{R})(\forall y\in \mathbb{R}) : \left(\dfrac{x}{x^2+x+1}= \dfrac{y}{y^2+y+1} \Rightarrow xy=0 \text{ أو } x=y\right)$

ليكن x و y عددين حقيقين بحيث : $\dfrac{x}{x^2+x+1}= \dfrac{y}{y^2+y+1}$ ومنه $xy^2+xy+x=yx^2+xy+y$ و بالتالي :

$xy^2-yx^2+xy-xy+x-y=0$ إذن $xy(y-x)+(x-y)=0$ ومنه $(xy-1)(y-x)=0$ و بالتالي $y-x=0$ أو $xy=1$

نستنتج أخيرا أن $x=y$ أو $xy=1$.

إذن : $(\forall x\in \mathbb{R})(\forall y\in \mathbb{R}) : \left(\dfrac{x}{x^2+x+1}= \dfrac{y}{y^2+y+1} \Rightarrow xy=0 \text{ أو } x=y\right)$

ومنه $(\forall x\in \mathbb{R})(\forall y\in \mathbb{R}) : \left(xy\neq 0 \text{ و } x\neq y \Rightarrow \dfrac{x}{x^2+x+1}\neq \dfrac{y}{y^2+y+1}\right)$

تمرين رقم 5 :

استعمال قانون فصل الحالات :

1) حل في المجموعة $\mathbb{R}$ المعادلة التالية : $2|x-1|=|x|$.

2) بين أن العدد 3 قاسم للعدد $n(n+1)(n+2)$ لكل $n\in \mathbb{N}$.

الجواب :

1) لحل المعادلة التالية $2|x-1|=|x|$ قي $\mathbb{R}$ نحدد إشارة $x-1$ و x في جدول للإشارات .

نستنتج أن :

في المجال $[1,+\infty[$

$|x-1|=x-1$ و $|x|=x$

ومنه فإن المعادلة تصبح على الشكل :

$2(x-1)=x$

$2x-2=x$

$x=2$

و $2\in[1,+\infty[$

في المجال $[0,1]$

$|x-1|=-x+1$ و $|x|=x$

ومنه فإن المعادلة تصبح على الشكل :

$2(-x+1)=x$

$-2x+2=x$

$-3x=-2$

$x=\dfrac{2}{3}$

في المجال $]-\infty,0[$

$|x-1|=-x+1$ و $|x|=-x$

ومنه فإن المعادلة تصبح على الشكل :

$2(-x+1)=-x$

$-2x+2=-x$

$-x=-2$

$x=2$

و $2\notin]-\infty,0[$

و $\dfrac{2}{3}\in[0,1]$

إذن $S=\left\{\dfrac{2}{3},2\right\}$

2) لنبين أن العدد 3 قاسم للعدد $n(n+1)(n+2)$ لكل $n\in\mathbb{N}$.

ليكن n عدد صحيح طبيعي .

نعلم أن كل عدد صحيح طبيعي n يكتب على الشكل : $n=3k$ أو $n=3k+1$ أو $n=3k+2$ بحيث $k\in\mathbb{N}$.

الحالة الأولى :

إذا كان : $n=3k$ بحيث $k\in\mathbb{N}$.

فإن : $n(n+1)(n+2)$

$=3k(3k+1)(3k+2)$

$=3\left[k(3k+1)(3k+2)\right]$

ومنه $n(n+1)(n+2)$ مضاعف للعدد 3 .

الحالة الثانية :

إذا كان : $n=3k+1$ بحيث $k\in\mathbb{N}$.

فإن : $n(n+1)(n+2)$

$=(3k+1)(3k+2)(3k+3)$

$=(3k+1)(3k+2)3(k+1)$

$=3\left[(3k+1)(3k+2)(k+1)\right]$

ومنه $n(n+1)(n+2)$ مضاعف للعدد 3 .

الحالة الثالثة :

إذا كان : $n=3k+2$ بحيث $k\in\mathbb{N}$.

فإن : $n(n+1)(n+2)$

$=(3k+2)(3k+3)(3k+4)$

$=(3k+2)3(k+1)(3k+4)$

$=3\left[(3k+2)(k+1)(3k+4)\right]$

ومنه $n(n+1)(n+2)$ مضاعف للعدد 3 .

و أخيرا نستنتج أن العدد $n(n+1)(n+2)$ مضاعف للعدد 3 لكل $n\in\mathbb{N}$.

تمرين رقم 6 :

بين بالترجع أن :

1) $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $\quad 1^2+2^2+......+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

http://www.xriadiat.com
PROF : ATMANI NAJIB

2) 10^n-1 يقبل القسمة على 9 لكل $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

3) $\forall n\geq 4:\quad 2^n\geq n^2$

الجواب :

1) ** لدينا : إذا كان $n=1$ فإن : $1^2+2^2+......+n^2=1$ و $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\dfrac{1(1+1)(2\times1+1)}{6}=\dfrac{6}{6}=1$

ومنه العبارة صحيحة بالنسبة لأول عنصر $n=1$.

** ليكن $n\in\mathbb{N}^*$. نفترض العبارة صحيحة بالنسبة لــ n بمعنى أن : $1^2+2^2+......+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

** لنبين أن العبارة صحيحة بالنسبة لــ $n+1$ بمعنى أن : $1^2+2^2+......+n^2+(n+1)^2=\dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

(نعوض n في التعبير الأول بـــ $n+1$ يعطينا التعبير الثاني)

لدينا : $1^2+2^2+......+n^2+(n+1)^2=\left(1^2+2^2+......+n^2\right)+(n+1)^2$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{6(n+1)^2}{6}$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}=\frac{(n+1)\left[n(2n+1)+6(n+1)\right]}{6}$$

$$=\frac{(n+1)\left[2n^2+n+6n+6\right]}{6}=\frac{(n+1)\left(2n^2+7n+6\right)}{6}$$

باستعمال مميز المعادلة $2n^2+7n+6=0$ نستنتج تعميلا لثلاثية الحدود $2n^2+7n+6$ ومنه :

$$=\frac{(n+1)\times2\times\left(n+\frac{3}{2}\right)(n+2)}{6}=\frac{(n+1)\times(2n+3)(n+2)}{6}$$

ومنه : $1^2+2^2+......+n^2+(n+1)^2=\dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

و بالتالي : $1^2+2^2+......+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ $\quad\forall n\in\mathbb{N}^*$

2) لنبين أن 10^n-1 يقبل القسمة على 9 لكل $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

** لدينا : إذا كان $n=1$ فإن : $10^n-1=10^1-1=10-1=9$ ومنه 10^1-1 يقبل القسمة على 9 . (صحة العبارة بالنسبة لأول عنصر)

** ليكن $n\in\mathbb{N}^*$. نفترض العبارة صحيحة بالنسبة لــ n بمعنى أن : . 10^n-1 يقبل القسمة على 9

** لنبين أن العبارة صحيحة بالنسبة لــ $n+1$ بمعنى أن : $10^{n+1}-1$ يقبل القسمة على 9 .

لدينا : $10^{n+1}-1=10\times10^{n}-1$

و بما أن $10^{n}-1$ يقبل القسمة على 9 فإنه يوجد عدد صحيح صبيعي k بحيث $10^{n}-1=9k$

ومنه : $10^{n}=9k+1$.

و بالتالي : $10^{n+1}-1=10\times10^{n}-1=10\times(9k+1)-1=90k+10-1=90k+9=9(10k+1)$

إذن : $10^{n+1}-1$ يقبل القسمة على 9 .

ومنه حسب مبدأالترجع فإن $10^{n}-1$ يقبل القسمة على 9 لكل $\forall n\in\mathbb{N}^{*}$.

3) لنبين أن $\forall n\geq4: \quad 2^{n}\geq n^{2}$.

** لدينا : إذا كان $n=4$ فإن $2^{n}=2^{4}=16$ و $n^{2}=4^{2}=16$ ومنه $2^{n}\geq n^{2}$. (صحة العبارة بالنسبة لأول عنصر)

** ليكن $n\geq4$. نفترض العبارة صحيحة بالنسبة لـ n بمعنى أن : $2^{n}\geq n^{2}$.

** لنبين أن العبارة صحيحة بالنسبة لـ $n+1$ بمعنى أن : $2^{n+1}\geq(n+1)^{2}$.

لدينا : $2^{n+1}=2\times2^{n}$ و بما أن : $2^{n}\geq n^{2}$ حسب إفتراض الترجع فإن $2\times2^{n}\geq2n^{2}$

و منه فإن : $2^{n+1}\geq2n^{2}$

يكفي الآن أن نبين أن : $2n^{2}\geq(n+1)^{2}$.

لدينا : $2n^{2}\geq(n+1)^{2}\Leftrightarrow2n^{2}\geq n^{2}+2n+1\Leftrightarrow n^{2}-2n-1\geq0$

لنحدد مميز ثلاثية الحدود $n^{2}-2n-1$: $\Delta=8$ إذن المعادلة $n^{2}-2n-1=0$ تقبل حلين مختلفين $1+\sqrt{2}$ و $1-\sqrt{2}$.

بما أن $n\geq4$ فإن $n\geq1+\sqrt{2}$ ومنه فإن $n^{2}-2n-1\geq0$

و بالتالي : $2n^{2}\geq(n+1)^{2}$ إذن $2^{n+1}\geq2n^{2}$ يعني أن $2^{n+1}\geq(n+1)^{2}$ (صحة العبارة بالنسبة لـ $n+1$.

إذن : $\forall n\geq4: \quad 2^{n}\geq n^{2}$.

رقم 7 (الإستدلال بالخلف)

http://www.xriadiat.com
PROF : ATMANI NAJIB

1) لتكن x y و z أعداد حقيقية .

بين أن النظمة $\begin{cases}2x-3y>3\\3y-2x\geq3\\y-z\leq2\end{cases}$ لا تقبل حلا .

2) بين أن 0 ليس جدرا للحدودية : $P(x)=x^{4}+12x-1$.

الجواب :

1) نفترض أن النظمة التالية $\begin{cases}2x-3y>3\\3y-2x\geq3\\y-z\leq2\end{cases}$ تقبل حلا (x,y,z)

لدينا : $2x-3y>3$ و $3y-2x\geq3$ إذن $(2x-3y)+(3y-2x)>3+3$ و بالتالي : $0>6$ و هذا تناقض مع $0<6$.

ومنه فإن النظمة $\begin{cases}2x-3y>3\\3y-2x\geq3\\y-z\leq2\end{cases}$ لا تقبل حلا .

2) لنفترض أن 0 جدر للحدودية $P(x)=x^{4}+12x-1$ إذا $P(0)=0$.

و لدينا : $P(0)=-1$ إذن $0=-1$ فنحصل على تناقض

و بالتالي 0 ليس جدرا للحدودية : $P(x)=x^{4}+12x-1$.