LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES

I) RAPPELLE ET DEFINITIONS ET NOTATIONS.

1) Activité et rappelle :

On s'intéresse à l'équation (E): $y'' + \omega^2 y = 0$

Dans cette notation y représente $f(x)$.

L'équation (E) est une équation différentielle de second ordre.

Montrer ce qui suit :

1. si f et g sont solutions de l'équation (E) alors : $(\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}2)(\alpha f + \beta g)$ est aussi solution de (E)
2. Montrer que les fonctions : $u(x) = cos\omega x$ et $v(x) = sin\omega x$ Sont solution de l'équation différentielle (E).
3. En déduire que $(\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ $(y = \alpha cos\omega x + \beta\omega x)$ est solution de (E)

On admet que la réciproque est vraie

Propriété : Les solutions de l'équation différentielle :(E): $y'' + \omega^2 y = 0$ sont les fonctions : $y = \alpha cos\omega x + \beta\ sin\omega x$ où α et β sont des réels.

Application : soit l'équation différentielle (E) : $y'' + 4y = 0$

1)Résoudre l'équation différentielle (E)

2)Déterminer la solution g qui vérifie :

$g(0)=1$ et $g'(0)=2$

solution : $(w=2)$ 1) la solution générale de l'équation différentielle (E) est :

La fonction : $F(x)=a\cos 2x+b\sin 2x$ où α et β sont des réels

2) $F'(x)=-2a\sin 2x+2b\cos 2x \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Donc : $\begin{cases}F(0)=1\\F'(0)=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\2b=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\b=1\end{cases}$

Donc : $F(x)=\cos 2x+\sin 2x$

On peut écrire $F(x)$ sous la forme :

$F(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

2) Définition : EQUATIONS DIFFERENTIELLES

Définition : Une équation différentielle est une équation ayant pour inconnue une ou plusieurs fonctions ; elle se présente sous la forme d'une relation entre ces fonctions inconnues et leurs dérivées successives. L'ordre d'une équation différentielle correspond au degré maximal de dérivation auquel l'une des fonctions inconnues a été soumise.

Remarque : Pour simplifier l'écriture d'une équation différentielle on note l'inconnu (qui est une fonction) y au lieu de $y(x)$.

Exemples :

1) L'équation différentielle : $y'=e^{2x}$ a pour solution les fonctions primitives de la fonction :

$x\to e^{2x}$ qui sont : $x\to\frac{1}{2}e^{2x}+c$

2) $y'+5y=0$:est une équation différentielle de $1er$ ordre sans second membre.

3) $y'-8y=2x-1$ est une équation différentielle de $1er$ ordre avec second membre.

4) $y''- 3y' + 5y = e^{2x}$: est une équation différentielle de $2ème$ ordre avec second membre.

II) L'EQUATION y'=ay OU $a \in \mathbb{R}*$

1) L'équation $y'= ay$ ou $a \in \mathbb{R}*$

Soit a un réel non nul et Considérons l'équation différentielle (E) $y'= ay$

$(E) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})(y'(x) = ay(x))$

a) A noter que la fonction nulle θ :

$(\forall x \in \mathbb{R})(\theta(x) = 0)$ est une solution de l'équation différentielle.

b) On suppose que y ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ on aura :$(E) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})(y'(x) = ay(x))$

$\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})\ (y'(x)/y(x)= a)$

On passe au primitives on trouve

$\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})(l\ n|y(x)| = ax + c)$

$\Leftrightarrow (\forall\ x \in \mathbb{R})(|y(x)| = \exp(ax+c)$
$\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})(y(x) = \pm \exp(ax+c)$ où $c \in \mathbb{R}$
$\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})(y(x) = \lambda \exp(ax)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$
Et puisque même la fonction nulle θ peut s'écrire de la forme $\theta(x)\ \lambda \exp(ax)$ ($\lambda = 0$)
On peut conclure que :
Propriété : Soit a un réel non nul.
(E) $y'= ay$ une équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$
La solution générale de l'équation différentielle (E) est l'ensemble des fonctions : $x \to y(x) = \lambda e^{ax}$
Où λ est un réel.
Exemple : Résoudre les équations différentielles suivantes :1) (E_1): $y'= 3y$ 2) (E_2): $y'- y = 0$
Solution :1) La solution générale de l'équation différentielle (E_1): est l'ensemble des fonctions :
$x \to y(x) = \lambda e^{3x}$ où λ est un réel.
2) (E_2): $y'- y = 0 \Leftrightarrow (E_2)$: $y'= 1y$
La solution générale de l'équation différentielle (E_2): est l'ensemble des fonctions : $x \to y(x) = \lambda e^{x}$
où λ est un réel.

2) L'équation y'=ay+b ou $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.

Soient a un réel non nul, b un réel quelconque,
Considérons l'équation différentielle :
(E) $y'= ay + b$

$$(E) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})\left(y'(x) = a\left(y(x) + \frac{b}{a}\right)\right)$$
$$\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})\left(y(x) + \frac{b}{a}\right)' = a\left(y(x) + \frac{b}{a}\right)$$
$$\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R})(z'(x) = az(x)) \quad \text{où } z(x) = y(x) + \frac{b}{a}$$
$$\Leftrightarrow (\forall\ x \in \mathbb{R})\left(y(x) + \frac{b}{a} = \lambda e^{ax}\right)$$
$$\Leftrightarrow (\forall\ x \in \mathbb{R})\left(y(x) = \lambda e^{ax} - \frac{b}{a}\right)$$

Propriété :Soit a un réel non nul et b un réel
(E) $y'= ay + b$ une équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$ .La solution générale de l'équation différentielle (E) est l'ensemble des fonctions :
$x \to y(x) = \lambda e^{x} - \dfrac{b}{a}$ où λest un réel.
Remarque : Le réel λ dans la solution générale de l'équation différentielle (E) peut-être déterminé par les conditions initiales
Exemple1 : Résoudre l'équations différentielle suivante : $(E): 2y' - 4y - 3 = 0$

Solution : $(E): 2y' - 4y - 3 = 0 \Leftrightarrow 2y' = 4y + 3$
$\Leftrightarrow y' = \dfrac{4y+3}{2} \Leftrightarrow y' = 2y + \dfrac{3}{2}$
on a donc ; $a = 2$ et $b = \dfrac{3}{2}$
La solution générale de l'équation différentielle (E): est l'ensemble des fonctions :
$x \mapsto \lambda e^{2x} - \dfrac{3}{4}$ où λ est un réel.

Exemple2 :soit l'équations différentielle suivante : $(E): \dfrac{1}{2}y' + 3y - 1 = 0$
1)Résoudre l'équation différentielle (E)
2) Déterminer la solution f de (E)
Telle que $f'(0) = -2$.

Solution :1)$(E): \dfrac{1}{2}y' + 3y - 1 = 0 \Leftrightarrow y' = -6y + 2$
Donc : $a = -6$et $b = 2$
La solution générale de l'équation différentielle (E): est l'ensemble des fonctions :
$x \mapsto \lambda e^{-6x} + 3$ Où λ est un réel.
2) $f(x) = \lambda e^{-6x} + 3$ On va calculer : $f'(x)$
$$f'(x) = \left(\lambda e^{-6x} + 3\right)' = -6\lambda e^{-6x}$$
$$f'(0) = -2 \Leftrightarrow -6\lambda e^{0} = -2 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{3}$$
Donc : $f(x) = \dfrac{1}{3}e^{-6x} + 3$ c'est la solution de (E) qui vérifie la condition initiale
Exercice : Considérons les équations différentielles (E_0): $y'- y = 0$ et (E) : $y' - y = 2x^2 + x$
1- Résoudre l'équation différentielle (E_0)
2- a) Soit P une fonction polynôme, quel sera le degré de P afin que P soit une solution de (E)
b) Déterminer le polynôme P pour que P soit une solution de (E)
c) Montrer que : y est solution de (E) si et seulement si $(y - P)$ est solution de (E)
d) En déduire la solution générale de L'équation (E)
3) déterminer la solution φ de (E) telle que $\varphi(0) = 2$

III) LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES :

$ay'' + by' + cy = 0$

Soit a un réel non nul et b et c sont des réels quelconques.

Définition : Considérons l'équation différentielle : (E): $ay'' + by' + cy = 0$

L'équation (1): $ar^2 + br + c = 0$ à variable réelle r

s'appelle l'équation caractéristique de l'équation différentielle $(\boldsymbol{E})$.

Exemples : 1) l'équation caractéristique de l'équation différentielle (E) : $-3y'' + 2y' - 4y = 0$ est : $-3r^2 + 2r - 4 = 0$

2) l'équation caractéristique de l'équation différentielle (E): $y'' + y = 0$ est : $r^2 + 1 = 0$.

1) Résolution de $(\boldsymbol{E})$: $ay'' + by' + cy = 0$

L'équation $ay'' + by' + cy = 0$ est dite à coefficients constants car a, b et c sont des réels donnés.

On Supposera $a \neq 0$

(sinon, l'équation est du premier ordre).

1.1) Linéarité :

L'équation $ay'' + by' + cy = 0$ possède la propriété suivante : Si y_1 et y_2 sont deux fonctions solutions de l'équation : $ay'' + by' + cy = 0$, alors, pour tous nombres A et B, la fonction $Ay_1 + By_2$ est aussi une solution.

A cause de cette propriété, on dit que l'équation : $ay'' + by' + cy = 0$ est linéaire.

1.2) Résolution : Par analogie avec une équation du premier ordre, on cherche une solution de la forme : $y(x) = e^{rx}$ où r est un complexe.

La fonction $y(x) = e^{rx}$ est deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, et, pour tout réel x : $y'(x) = re^{rx}$ et $y''(x) = r^2e^{rx}$

Donc, dire que y est solution équivaut à dire que, pour tout réel x : $ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0$ soit

encore, puisque $e^{rx} \neq 0$, à : $ar^2 + br + c = 0$

La résolution de cette l'équation permet donc de trouver des solutions (a priori à valeurs complexes). De plus, lorsque l'on connaît deux solutions y_1 et y_2 de l'équation $ay'' + by' + cy = 0$, on en connaît une famille car toutes les Fonctions $Ay_1 + By_2$

Avec A et B complexes, sont aussi solutions.

Premier cas : Si $\Delta > 0$ alors l'équation :

$ar^2 + br + c = 0$ a deux racines, r_1 et r_2 réelles et distinctes et d'après ce qui précède, les fonctions y_1 et y_2 définies sur IR par: $y_1(x) = e^{r_1 x}$ et

$y_2(x) = e^{r_2 x}$ sont des solutions

(à valeurs réelles dans ce cas).

Nous admettrons que toute autre solution réelle s'écrit : $y(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$ où A et B réels.

Deuxième cas : Si $\Delta < 0$ alors l'équation

$ar^2 + br + c = 0$: a deux racines, z_1 et z_2 , complexe conjugués.

Alors les fonctions g_1 et g_2 définies sur IR par:

$g_1(x) = e^{z_1 x}$ et $g_2(x) = e^{\overline{z_1} x}$ sont des solutions à valeurs complexes.

Notons $z_1 = p + qi$ où p et q sont des réels.

$$g_1(x) = e^{(p+qi)x} = e^{px}e^{qxi} = e^{px}\left(\alpha \cos qx + \beta \sin qx\right)$$

et $g_2(x) = e^{(p-qi)x} = e^{px}e^{-qxi} = e^{px}\left(\alpha \cos qx - \beta \sin qx\right)$

donc ; $y_1 = \dfrac{g_1(x) - g_2(x)}{2}$ et $y_2 = \dfrac{g_1(x) + g_2(x)}{2i}$

Sont aussi des solutions de (E) et à valeurs réelles et on a :

$(\forall x \in \mathbb{R})\ y_1(x) = e^{px}\cos qx$ et $(\forall x \in \mathbb{R})\ y_2(x) = e^{px}\sin qx$

Nous admettrons que toutes les solutions s'écrivent de la forme :

$$y(x) = e^{px}\left(A\cos qx + B\sin qx\right)$$

Pour résumer : si $z_1 = p + qi$ alors toutes les solutions de (E) s'écrivent de la forme :

$$y(x) = e^{px}\left(A\cos qx + B\sin qx\right)$$

où A et B sont des réels.

Troisième cas : Si $\Delta = 0$ l'équation $ar^2 + br + c = 0$ a une racine double r

Alors les fonctions y_1 définie sur IR par: $y_1(x)=e^{rx}$ est solution de (E) ; nous admettrons que la fonction $y_2(x)=xe^{rx}$ est aussi solutions de (E) et que toutes les solutions de (E) s'écrivent de la forme $y(x)=(Ax+B)e^{rx}$ où A et B sont des réels

Théorème : Soit l'équation différentielle :

(E) $ay''+by'+cy=0$

Et soit (E_1): $ar^2+br+c=0$ son équation Caractéristique.

$\Delta=b^2-4ac$ le discriminant de (E_1)

1) Si Δ > 0 l'équation (E_1) a deux racines : r_1 et r_2 réelles et distinctes et les solutions de l'équation (E) sont les fonctions : $y(x)=Ae^{r_1x}+Be^{r_2x}$ où A et B réels

2) Si Δ < 0 l'équation (E_1) a deux racines z_1 et z_2 complexes conjugués et si : $z_1=p+qi$ alors les solutions de l'équation (E) sont les fonctions $y(x)=e^{px}\left(A\cos qx+B\sin qx\right)$ où A et B réels

3) Si Δ = 0 l'équation (E_1) admet une racine double r et les solutions de (E) sont les fonctions: $y(x)=(Ax+B)e^{rx}$ Où A et B sont des réels.

Exemples :

Exemple1 :1) Résoudre l'équations différentielle suivante : $(E): y''-7y'+12y=0$

2) Déterminer la solution f de (E)

Telle que $f(0)=0$ et $f'(0)=1$

Solution :1) l'équation Caractéristique de (E) est :

(E_1): $r^2-7r+12=0$

On a : $\Delta=1$ donc l'équation (E_1) a deux racines : r_1 et r_2 réelles et distinctes : $r_1=3$ et $r_2=4$

Donc les solutions de l'équation (E) sont les fonctions : $y(x)=\alpha e^{4x}+\beta e^{3x}$ où α et β réels

2) $f(x)=\alpha e^{4x}+\beta e^{3x}$

$$f'(x)=\left(\alpha e^{4x}+\beta e^{3x}\right)'=4\alpha e^{4x}+3\beta e^{3x}$$

$$\begin{cases} f(0)=0 \\ f'(0)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=0 \\ 4\alpha+3\beta=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=-\alpha \\ 4\alpha-3\alpha=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=-1 \\ \alpha=1 \end{cases}$$

Donc : $f(x)=e^{4x}-e^{3x}$ c'est la solution de (E) qui vérifie les conditions initiales

Exemple2 :1) Résoudre l'équations différentielle suivante : $(E): y''-2y'+y=0$

2) Déterminer la solution f de (E)

Telle que $f(0)=0$ et $f'(0)=1$

Solution :1) l'équation Caractéristique de (E) est :

(E_1): $r^2-2r+1=0$

On a : $\Delta=0$ donc l'équation (E_1) admet une racine double $r_0=\frac{-b}{2a}=1$

Donc les solutions de l'équation (E) sont les fonctions : $y(x)=(\alpha x+\beta)e^x$ où α et β réels

2) $f(x)=(\alpha x+\beta)e^x$

$$f'(x)=\left((\alpha x+\beta)e^x\right)'=\left((\alpha x+\beta)\right)'e^x+(\alpha x+\beta)\left(e^x\right)'$$

$$f'(x)=(\alpha x+\alpha+\beta)e^x$$

$$\begin{cases} f(0)=0 \\ f'(0)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=0 \\ \alpha+\beta=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta=0 \\ \alpha=1 \end{cases}$$

Donc : $f(x)=(1x+0)e^x$ donc : $f(x)=xe^x$

C'est la solution de (E) qui vérifie les conditions initiales.

Exemple3 :1) Résoudre l'équations différentielle suivante : $(E): y''-4y'+13y=0$

2) Déterminer la solution f de (E)

Telle que $f(0)=0$ et $f'(0)=1$

Solution :1) l'équation Caractéristique de (E) est :

(E_1): $r^2-4r+13=0$

On a : $\Delta=-36=(6i)^2$ donc l'équation (E_1) a deux racines z_1 et z_2 complexes conjugués et on a :

$z_1=\frac{4+i6}{2}$ et $r_2=\frac{4-i6}{2}$ donc $z_1=2+3i=p+iq$

Donc les solutions de l'équation (E) sont les fonctions : $y(x)=e^{2x}(\alpha\cos 3x+\beta\sin 3x)$ où α et β réels

2) $f(x)=e^{2x}(\alpha\cos 3x+\beta\sin 3x)$

$f'(x)=\left(e^{2x}(\alpha\cos 3x+\beta\sin 3x)\right)'$

$=\left(e^{2x}\right)'(\alpha\cos 3x+\beta\sin 3x)+e^{2x}(\alpha\cos 3x+\beta\sin 3x)'$

$=2e^{2x}(\alpha\cos 3x+\beta\sin 3x)+e^{2x}(-3\alpha\sin 3x+3\beta\cos 3x)$

$f'(x)=e^{2x}(2\alpha\cos 3x+2\beta\sin 3x-3\alpha\sin 3x+3\beta\cos 3x)$

$f'(x)=e^{2x}((2\alpha+3\beta)\cos 3x+(2\beta-3\alpha)\sin 3x)$

$\begin{cases}f(0)=0\\ f'(0)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=0\\ 2\alpha+3\beta=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=0\\ \beta=\frac{1}{3}\end{cases}$

Donc : $f(x)=e^{2x}\left(0\times\cos 3x+\frac{1}{3}\sin 3x\right)=\frac{1}{3}e^{2x}\sin 3x$

c'est la solution de (E) qui vérifie les conditions initiales

Exercice : Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $y'=7y-5$ avec $y(0)=-6$

2) $y''-15y'+56y=0$ avec : $y'(0)=9$; $y(0)=-3$

3) $y''+14y'+49y=0$ avec **:** $y'(0)=6$; $y(0)=-3$

4) $y''+y'+\frac{5}{2}y=0$ avec **:** $y'(0)=6$; $y(0)=-4$

Solutions : 1) $y'=7y-5$ Donc les solutions de l'équation (E) sont les fonctions :

$y(x)=\lambda e^{7x}+\frac{5}{7}\ (\lambda\in\mathbb{R})$

On a **:** $y(0)=\lambda+\frac{5}{7}=-6$ donc **:** $\lambda=-\frac{47}{7}$

Donc : la solution de l'équation qui vérifie les conditions initiales est : $\boxed{y(x)=-\frac{47}{7}e^{7x}+\frac{5}{7}}$

2) $y''-15y'+56y=0$ **avec :** $y'(0)=9$; $y(0)=-3$

l'équation Caractéristique de l'équation est :

$r^2-15y+56=0$ donc : $r_1=7$ **et** $r_2=8$

Donc : $y(x)=\alpha e^{7x}+\beta e^{8x}$ où α et β réels

Donc **:** $y'(x)=7\alpha e^{7x}+8e^{8x}$

$\begin{cases}y(0)=\alpha+\beta\\ y'(0)=7\alpha+8\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y(0)=-3\\ y'(0)=9\end{cases}$

Donc : $\begin{cases}\alpha+\beta=-3\\ 7\alpha+8\beta=9\end{cases}$ donc : $\beta=30$; $\alpha=-33$

Donc : la solution de l'équation qui vérifie les conditions initiales est : $\boxed{y(x)=-33e^{7x}+30e^{8x}}$

3) $y''+14y'+49y=0$ **avec :** $y'(0)=6$; $y(0)=-3$

l'équation Caractéristique de l'équation est :

$r^2+14y+49=0$ donc : $r=-7$

Les solutions : $\left((\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2\right)$ $y(x)=(\alpha x+\beta)e^{-7x}$

$y'(x)=\alpha e^{-7x}-7(\alpha x+\beta)e^{-7x}$

$\begin{cases}y(0)=-3\\ y'(0)=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y(0)=\beta\\ y'(0)=\alpha-7\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=-3\\ \alpha-7\beta=6\end{cases}$

Donc : $\alpha=-15$; $\beta=-3$

Donc : la solution de l'équation qui vérifie les conditions initiales est $\boxed{y(x)=(-15x-3)e^{-7x}}$

4) $y''+y'+\frac{5}{2}y=0$ **avec :** $y'(0)=6$; $y(0)=-4$

l'équation Caractéristique de l'équation est :

$r^2+y+\frac{5}{2}=0$ on trouve **:** $z=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$ et $\bar{z}=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$

Donc **:** $\left((\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2\right)$ $y(x)=e^{-\frac{1}{2}x}\left(\alpha\cos\left(\frac{3}{2}x\right)+\beta\sin\left(\frac{3}{2}x\right)\right)$

où α et β réels

$$y'(x) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\left(\alpha\cos\left(\frac{3}{2}x\right)+\beta\sin\left(\frac{3}{2}x\right)\right)$$
$$+\frac{3}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\left(-\alpha\sin\left(\frac{3}{2}x\right)+\beta\cos\left(\frac{3}{2}x\right)\right)$$

$$\begin{cases} y(0) = -4 \\ y'(0) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y(0) = \alpha \\ y'(0) = -\frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{2}\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -4 \\ -\frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{2}\beta = 6 \end{cases}$$

Donc : $\alpha = -4$; $\beta = \frac{8}{3}$

Donc : la solution de l'équation qui vérifie les conditions initiales est

$$\boxed{y(x) = e^{-\frac{1}{2}x}\left(-4\cos\left(\frac{3}{2}x\right)+\frac{8}{3}\sin\left(\frac{3}{2}x\right)\right)}$$

Exercice : Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $2y'' + y' - 3y = 0$
2. $y'' + 2y' + 2y = 0$
3. $y'' + 4y' + 4y = 0$
4. $y'' + 2y = 0$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron »
Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement

Aux calculs et exercices Que l'on devient

Un mathématicien