

FONCTIONS PRIMITIVES**I) FONCTION PRIMITIVE D'UNE FONCTION****1) Activités : Activité1**

1) Déterminer une fonction F qui admet pour fonction dérivée la fonction : $f(x) = x^2 + 2x + 3$

2) existe-t-il une autre fonction G tel que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}); G'(x) = f(x) ?$$

3) combien Ya t'ils de onction H tel que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}); H'(x) = f(x) ?$$

et donner une expression de toutes les fonctions primitives de h

Remarques : 1) la fonction F tel que :

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x \text{ Est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et}$$

$$\text{Et on a } (\forall x \in \mathbb{R}); F'(x) = f(x)$$

On dira que : F est une primitive de f

2) Soit G une fonction définie sur

$$G(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x + 2 \text{ on a aussi : } G \text{ est dérivable}$$

$$\text{sur } \mathbb{R} \text{ et } (\forall x \in \mathbb{R}); G'(x) = f(x)$$

G est aussi une primitive de f

3) toute fonction H de la forme :

$$H(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x + k \text{ avec } k \in \mathbb{R} \text{ aussi une}$$

primitive de f

Activité2 : Soient F une fonction primitive de la fonction f sur l'intervalle I c'est-à-dire

$$(\forall x \in I)(F'(x) = f(x))$$

et G une fonction primitive de la fonction g sur l'intervalle I , α et β deux réels.

1- Montrer que $(\alpha F + \beta G)$ est une fonction primitive de la fonction $(\alpha f + \beta g)$ sur I .

2- Soient F_1 et F_2 deux fonctions primitives de la fonction f sur l'intervalle I ; Montrer que :

$$(\forall x \in I)(F_2(x) = F_1(x) + \lambda)$$

où λ est un réel quelconque.

3- Démontrer que si f admet une fonction

primitive sur I et $x_0 \in I$; alors il existe une unique

fonction F_0 fonction Primitive de f telle que

$$F_0(x_0) = y_0 \text{ où } y_0 \text{ un réel quelconque.}$$

2) Définition et propriétés

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I ; On dit que la fonction F est une

fonction primitive de la fonction f sur l'intervalle I si : 1) F est dérivable sur I

$$2) (\forall x \in I)(F'(x) = f(x))$$

Théorème :(admis)

Si f est continue sur I alors f admet une fonction primitive sur I

Remarque : La continuité dans le théorème précédent est une condition suffisante qui n'est pas nécessaire.

Propriété : Si f admet une fonction primitive F sur I alors toutes les fonctions primitives de f sur I s'écrivent de la : forme : $F + \lambda$ où λ est un réel.

Propriété : Si F_1 et F_2 sont deux fonction primitive d'une fonction f sur I alors :

$$(\forall x \in I)(F_2(x) = F_1(x) + \lambda) \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}$$

Exemple : Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = 2x + 1 \text{ si } x \leq 1$$

$$f(x) = 2x - 1 \text{ si } x > 1$$

Montrer que la fonction f n'admet pas de primitive Sur \mathbb{R}

Solution : On remarque que f n'est pas continue sur \mathbb{R} ; (elle n'est pas continue en 1)

$$\text{en effet : } f(1) = 3 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 \neq f(1)$$

$F_1(x) = x^2 + x + k_1$ est une fonction primitive de la fonction f sur $] - \infty, 1]$.

$F_2(x) = x^2 - x + k_2$ est une fonction primitive de la fonction f sur $]1, +\infty[$.

Si f admet une primitive F sur \mathbb{R} alors ils existent

k_1 et k_2 tels que :

$$\begin{cases} F_1(x) = x^2 + x + k_1; \text{ si } \dots x \leq 1 \\ F_2(x) = x^2 - x + k_2; \text{ si } \dots x > 1 \end{cases}$$

et que F soit dérivable sur \mathbb{R} et que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}); F'(x) = f(x)$$

On a F est dérivable sur $]-\infty, 1[$

et $(\forall x \in]-\infty, 1[)(F'(x) = f(x))$

et F est dérivable sur $]1, +\infty[$

et $(\forall x \in]1, +\infty[)(F'(x) = f(x))$

Le problème il faut déterminer (s'ils existent)

k_1 et k_2 dans \mathbb{R} pour que F soit dérivable en 1 et

que : $F'(1) = f(1) = 3$.

On a $F(1) = 2 + k_1$

D'autre part pour que f soit dérivable en 1, il faut qu'elle soit continue en 1, ce qui implique

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = F(1)$$

On en déduit que $2 + k_1 = k_2$ d'autre part :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - x + k_2 - 2 - k_1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - x - 2 + k_2 - k_1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - x - 2 + 2 + k_1 - k_1}{x - 1}$$

Car : $2 + k_1 = k_2$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} x = 1 = F'_d(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + x + k_1 - 2 - k_1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} x + 2 = 3 = F'_g(1)$$

Donc pour tous réels k_1 et k_2 ; $F'_d(1) \neq F'_g(1)$

D'où F n'existe pas et par suite f n'admet pas de primitive sur \mathbb{R}

Propriété : Si f admet une fonction primitive sur I

et $x_0 \in I$; alors il existe une unique fonction F_0

fonction Primitive de f telle que $F_0(x_0) = y_0$ où y_0 un réel quelconque.

Exemple : Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$

$$\text{par : } f(x) = 2x^2 + x + 1 + \frac{1}{x^2}$$

1) Déterminer les fonctions primitives de la fonction f sur $]0; +\infty[$

2) Déterminer la fonction primitive de la fonction f sur $]0; +\infty[$ tel que : $F(1) = 3$

Solution : 1) $f(x) = 2x^2 + x + 1 + \frac{1}{x^2}$

$$\text{Donc : } F(x) = 2 \times \frac{1}{3} x^{2+1} + \frac{1}{2} x^{1+1} + 1x - \frac{1}{x^2} + k$$

$$\text{Donc : } F(x) = \frac{2}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 + x - \frac{1}{x} + k \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

$$2) F(1) = 3 \Leftrightarrow \frac{2}{3} \times 1^3 + \frac{1}{2} \times 1^2 + 1 - \frac{1}{1} + k = 3$$

$$F(1) = 3 \Leftrightarrow \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + 1 - 1 + k = 3 \Leftrightarrow \frac{7}{6} + k = 3 \Leftrightarrow k = \frac{11}{6}$$

Donc : la fonction primitive de la fonction f sur $]0; +\infty[$ tel que : $F(1) = 3$ est :

$$F(x) = \frac{2}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 + x - \frac{1}{x} + \frac{11}{6}$$

Propriété : Si F est une fonction primitive de la fonction f sur l'intervalle I et G une fonction primitive de la fonction g sur l'intervalle I et α un réel alors :

1) $(F + G)$ est une fonction primitive de la fonction $(f + g)$ sur I

2) (αF) est une fonction primitive de la fonction (αf) sur I

3) Tableau des fonctions primitives usuelles.

La fonction	Sa fonction primitive
α ($\alpha \in \mathbb{R}$)	$\alpha x + c$
x^n ($n \in \mathbb{N}$)	$\frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$
\sqrt{x}	$\frac{2}{3} \sqrt{x^3} + c$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{n}{n+1} \sqrt[n]{x^{n+1}}$
x^r ($r \in \mathbb{Q}/\{-1\}$)	$\frac{1}{r+1} x^{r+1} + c$
$\sin(ax + b)$	$\frac{-1}{a} \cos(ax + b) + c$
$\cos(ax + b)$	$\frac{1}{a} \sin(ax + b) + c$

4) Opérations sur les fonctions primitives.

Les seules opérations sur les fonctions primitives sont : la somme et le produit par un réel. Mais grâce au tableau des opérations sur les fonctions dérivées on peut en déduire :

La fonction	Sa fonction primitive
$u' + v'$	$u + v + C^{te}$
$\alpha u'$	$\alpha u + C^{te}$
$u' u^n \ (n \in \mathbb{N})$	$\frac{1}{n+1} u^{n+1} + C^{te}$
$\frac{u'}{u^2}$	$\frac{-1}{u} + C^{te}$
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u} + C^{te}$
$u'^n \sqrt{u} \ (n \in \mathbb{N}^*)$	$\frac{n}{n+1} \sqrt[n]{u^{n+1}} + C^{te}$
$u' u^r \ (r \in \mathbb{Q} / \{-1\})$	$\frac{1}{r+1} u^{r+1} + C^{te}$
$u' \times v' \text{ ou}$	$v \text{ ou} + C^{te}$

La ligne en couleur jaune est une généralisation des 4 lignes précédentes.

5) Application :

Exercice1 (situation directe): Déterminer une fonction primitive des fonctions suivantes :

1) $f(x) = 5x^4 + 3x + 1$ 2) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \cos x + \sin x - 1$

3) $f(x) = \sin x + x \cos x$ 4) $f(x) = (2x-1)^3$

5) $f(x) = \frac{x}{(x^2-1)^2}$ 6) $f(x) = 5x^3 \sqrt{3x^2+1}$

7) $f(x) = \frac{4x+1}{(2x^2+x)^4}$ 8) $f(x) = 7x \cos(\pi x^2 + 3)$

Solutions : 1) $f(x) = 5x^4 + 3x + 1$

$$F(x) = 5 \times \frac{1}{5} x^5 + 3 \times \frac{1}{2} x^2 + 1x + k \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

2) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \cos x + \sin x - 1$

$$F(x) = 2\sqrt{x} + \sin x - \cos x - x + k \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

3) $f(x) = \sin x + x \cos x = x' \sin x + x(\sin x)'$

Donc : $F(x) = x \times \sin x + k$ avec $k \in \mathbb{R}$

4) $f(x) = (2x-1)^3 = \frac{1}{2} (2x-1)' (2x-1)^3$

$$F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3+1} (2x-1)^{3+1} + k \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

$$F(x) = \frac{1}{8} (2x-1)^4 + k \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

5) $f(x) = -\frac{x}{(x^2-1)^2}$

on doit remarquer que : $f(x) = -\frac{(x^2-1)'}{(x^2-1)^2}$

et par suite : $F(x) = \frac{1}{x^2-1} + k$ avec $k \in \mathbb{R}$

6) $f(x) = 5x^3 \sqrt{3x^2+1}$ On doit remarquer que :

la fonction $u(x) = 3x^2 + 1$ donne $u'(x) = 6x$ et par

suite : $f(x) = \frac{5}{6} u'(x) \sqrt[3]{u(x)}$ on utilisant le tableau

(c'est de la forme : $u'^n \sqrt[n]{u}$ ($n = 3$))

Donc les fonctions primitives de f s'écrivent sous

la forme : $F(x) = \frac{5}{6} \frac{3}{4} \sqrt[3]{u^4(x)} + k$

$$F(x) = \frac{5}{8} \sqrt[3]{(3x^2+1)^4} + k \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

7) Déterminons une fonction primitive de :

$f(x) = \frac{4x+1}{(2x^2+x)^4}$ On doit remarquer que :

la fonction $u(x) = 2x^2 + x$ donne $u'(x) = 4x + 1$

et par suite : $f(x) = \frac{u'(x)}{u^4(x)} = u'(x) u^{-4}(x)$

En utilisant le tableau on a :

(c'est de la forme : $u' u^n$ ($n = -4$))

Donc les fonctions primitives de f s'écrivent sous

la forme : $F(x) = \frac{1}{-4+1} u^{-4+1}(x) + k$

$$F(x) = -\frac{1}{3} (2x^2+x)^{-3} + k = -\frac{1}{3} \frac{1}{(2x^2+x)^3} + k$$

8) $f(x) = 7x \cos(\pi x^2 + 3)$ On doit remarquer que :

la fonction $u(x) = \pi x^2 + 3$ donne $u'(x) = 2\pi x$

et par suite : $f(x) = \frac{7}{2\pi} u'(x) \cos(u(x))$

(c'est de la forme : $u' \times (v \circ u)$)

Donc les fonctions primitives de f s'écrivent sous

la forme : $F(x) = \frac{7}{2\pi} \sin(\pi x^2 + 3) + k$ avec $k \in \mathbb{R}$

Exercice2 : Déterminer une fonction primitive de

fonction suivante : $f(x) = \frac{6}{4x^2 + 4x + 1}$

Solutions : A remarquer que

$$f(x) = \frac{6}{(2x+1)^2} = (-3) \left(-\frac{(2x+1)'}{(2x+1)^2} \right) \text{ (C'est de la forme: } -\frac{u'}{u^2} \text{)}$$

Donc les fonctions primitives de la fonction f sont

les fonctions : $F(x) = \frac{-3}{2x+1} + k$ avec $k \in \mathbb{R}$

Remarque : On peut utiliser cette méthode pour toutes les fonctions de la formes :

$$f(x) = \frac{\alpha}{ax^2 + bx + c} \text{ où le discriminant } \Delta \text{ est nul}$$

Exercice3 : Déterminer les fonctions primitives des fonctions :

1) $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt[3]{2 + \cos x}}$

2) $f(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x$ 3) $f(x) = (4x + 5)^2$

4) $f(x) = 2\sqrt{2x+1}$ 5) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

6) $f(x) = x\sqrt{x^2+1}$ 7) $f(x) = \tan^2 x$

8) $f(x) = \cos^4 x$ (utiliser : $\cos^2 x = (1 + \cos 2x)/2$)

9) $f(x) = \sin^3 x$ (Remarquer que : $\sin^3 x = \sin x \sin^2 x$)

Solutions : 1) il faut faire des transformations : a remarquer que :

1) $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt[3]{2 + \cos x}} = -(2 + \cos x)' (2 + \cos x)^{-\frac{1}{3}}$

(c'est de la forme : $u'u''$)

Donc les fonctions primitives de f s'écrivent sous la forme :

$$F(x) = -\frac{1}{-\frac{1}{3}+1} (2 + \cos x)^{\frac{1}{3}+1} + k = -\frac{3}{2} (2 + \cos x)^{\frac{2}{3}} + k$$

$$F(x) = -\frac{3}{2} \sqrt[3]{(2 + \cos x)^2} + k \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

2) $f(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x = (x^2)' \sin x + x^2 (\sin x)'$

Donc : $F(x) = x^2 \times \sin x + k$ avec $k \in \mathbb{R}$

3) $f(x) = (4x + 5)^2 = \frac{1}{4} (4x + 5)' (4x + 5)^2$

$$F(x) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2+1} (4x+5)^{2+1} + k$$

$$F(x) = \frac{1}{12} (4x+5)^3 + k \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

4) $f(x) = 2\sqrt{2x+1} = (2x+1)' (2x+1)^{\frac{1}{2}}$

Donc : $F(x) = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} (2x+1)^{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3} (2x+1)^{\frac{3}{2}}$

$$F(x) = \frac{2}{3} (2x+1)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} (\sqrt{2x+1})^3 + k$$

5) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}}$

$$F(x) = \sqrt{x^2+1} + k \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

6) $f(x) = x\sqrt{x^2+1} = \frac{1}{2} (x^2+1)' (x^2+1)^{\frac{1}{2}}$

$$F(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{1}{2}+1} (x^2+1)^{\frac{1}{2}+1} + k = \frac{1}{3} (x^2+1)^{\frac{3}{2}} + k$$

$$F(x) = \frac{1}{3} (\sqrt{x^2+1})^3 + k \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

7) $f(x) = \tan^2 x = (1 + \tan^2 x) - 1$

$$F(x) = \tan x - x + k \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

$$8) f(x) = \cos^4 x = (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2$$

$$f(x) = \frac{1}{4}(1+2\cos 2x+\cos^2 2x) = \frac{1}{4}\left(1+2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)$$

$$f(x) = \frac{1}{8}(3+4\cos 2x+\cos 4x) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$$

$$F(x) = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + k \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

$$9) f(x) = \sin^3 x = \sin x \times \sin^2 x = \sin x \times (1 - \cos^2 x)$$

$$f(x) = \sin x - \sin x \times \cos^2 x = \sin x + (\cos x)' \times \cos^2 x$$

$$F(x) = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + k \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

Exercice4: Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$

$$\text{par : } f(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$$

1) Déterminer les réels a et b tels que :

$$f(x) = a + \frac{b}{(x+1)^2} \quad \forall x \in [0; +\infty[$$

2) Déterminer la fonction primitive F de la fonction

$$f \text{ sur } [0; +\infty[\text{ tel que : } F(1) = \frac{5}{2}$$

Solution :1)

$$f(x) = a + \frac{b}{(x+1)^2} = \frac{a(x+1)^2 + b}{(x+1)^2} = \frac{ax^2 + 2ax + a + b}{(x+1)^2}$$

$$\text{Donc : } \begin{cases} a=1 \\ 2a=2 \\ a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=1 \\ b=-1 \end{cases} \text{ donc : } f(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$2) f(x) = 1 - \frac{(x+1)'}{(x+1)^2} \text{ Donc : } F(x) = x + \frac{1}{x+1} + k$$

$$k \in \mathbb{R} \quad \forall x \in [0; +\infty[$$

Exercice5: Soit la fonction f définie sur $[1; +\infty[$

$$\text{par : } f(x) = x\sqrt{x-1}$$

1) montrer que : $f(x) = \sqrt{(x-1)^3} + \sqrt{x-1} \quad \forall x \in [1; +\infty[$

2) Déterminer la fonction primitive F de la fonction f sur $[1; +\infty[$ tel que : $F(2) = 1$

Solution :1) $\forall x \in [1; +\infty[$

$$\sqrt{(x-1)^3} + \sqrt{x-1} = \sqrt{(x-1)^2} \times \sqrt{x-1} + \sqrt{x-1} = |x-1| \times \sqrt{x-1} + \sqrt{x-1}$$

On a : $x \in [1; +\infty[$ donc : $x \geq 1$ donc : $x-1 \geq 0$

donc :

$$\sqrt{(x-1)^3} + \sqrt{x-1} = (x-1) \times \sqrt{x-1} + \sqrt{x-1} = x\sqrt{x-1} - 1\sqrt{x-1} + \sqrt{x-1} = x\sqrt{x-1}$$

$$2) f(x) = \sqrt{(x-1)^3} + \sqrt{x-1} \quad \forall x \in [1; +\infty[$$

$$f(x) = \left((x-1)^3\right)^{\frac{1}{2}} + (x-1)^{\frac{1}{2}} = (x-1)^{\frac{3}{2}} + (x-1)^{\frac{1}{2}}$$

$$f(x) = (x-1)' (x-1)^{\frac{3}{2}} + (x-1)' (x-1)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{Donc : } F(x) = \frac{1}{\frac{3}{2}+1} (x-1)^{\frac{3}{2}+1} + \frac{1}{\frac{1}{2}+1} (x-1)^{\frac{1}{2}+1} + k$$

$$F(x) = \frac{2}{5} (x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} (x-1)^{\frac{3}{2}} + k$$

$$F(x) = \frac{2}{5} (\sqrt{x-1})^5 + \frac{2}{3} (\sqrt{x-1})^3 + k \quad k \in \mathbb{R}$$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron
Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien

