Devoir libre avec correction de préparation pour le devoir surveillé n°5 sur: Les fonctions

http://www.xriadiat.com

Exercice1 : Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes définie par :

1) $f(x)=\sqrt{-2x^2+x+3}$ 2) $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{-2x^2+x+3}}$ 3) $f(x)=\sqrt{\dfrac{-9x+3}{x+1}}$ 4) $f(x)=\dfrac{|x-5|}{x^2+1}$ 5) $h(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}}{x-1}$

Exercice2 : Soit la fonction f définie par: $f(x)=\dfrac{x^3}{|x+2|-|x-2|}$

1) Déterminer le domaine de définition de f
2) Etudier la parité de la fonction f

Exercice3: Soit f une fonction numérique
tel que : $f(x)=-x^2-2x+1$

1)Préciser le domaine de définition de f
2)Calculer le taux d'accroissement de fonction de f entre x_1 et x_2 tel que : $x_1 \neq x_2$
3)Etudier la monotonie de f sur : $I=[-1;+\infty[$ et sur $J=]-\infty;-1]$
4)Dresser le tableau de variation de f
5)En déduire les extrémums de f sur $\mathbb{R}$
6) Trouver les points d'intersection de la courbe (C_f) avec les axes du repère
7)Tracer la courbe représentative (C_f) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

Exercice4 : Soit f une fonction numérique tel que: $f(x)=2x^2-4x-2$

1) Déterminer D_f et déterminer α et β tel que : $f(x)=2(x-\alpha)^2+\beta$ pour tout $x\in\mathbb{R}$
2) Déterminer les éléments caractéristiques de (C_f)
3) Déterminer le Tableau de variations de f
4) En déduire les extrémums de f sur $\mathbb{R}$

Exercice5 : Soient f et g les deux fonctions définies sur R par :
$f(x)=x^2-2x-1$ et $g(x)=2x-4$

1) Déterminer la forme canonique de $f(x)$ et Déterminer les éléments caractéristiques de (C_f) et déterminer le Tableau de variations de f
2)Tracer Les courbes représentatives de (C_f) et (C_g)
3)Résoudre graphiquement et algébriquement l'équation : $f(x)=g(x)$
4)Résoudre graphiquement et algébriquement l'inéquation ; $f(x)\geq g(x)$
5)Trouver les points d'intersection de la courbe (C_f) avec les axes du repère

Exercice6: Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$ et (C_f) sa courbe représentative

1) Déterminer D_f et déterminer α et β et k tel que : $f(x)=\beta+\dfrac{k}{x-\alpha}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$
2) Déterminer le Tableau de variations de f
3) Tracer la courbe représentative (C_f) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

Correction

Correction

Exercice1 : Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes définie par :

1) $f(x)=\sqrt{-2x^2+x+3}$. 2) $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{-2x^2+x+3}}$. 3) $f(x)=\sqrt{\dfrac{-9x+3}{x+1}}$. 4) $f(x)=\dfrac{|x-5|}{x^2+1}$ 5) $h(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}}{x-1}$.

Solution:

1) $f(x)=\sqrt{-2x^2+x+3}$ $D_f=\{x\in\mathbb{R}/-2x^2+x+3\geq 0\}$

$\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4\times(-2)\times 3=1+24=25=(5)^2>0$

Donc on a deux racines : $x_1=\dfrac{-1+5}{2\times(-2)}=\dfrac{4}{-4}=-1$ et $x_2=\dfrac{-1-5}{2\times(-2)}=\dfrac{-6}{-4}=\dfrac{3}{2}$

x	$-\infty$		-1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$-2x^2+x+3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc : $D_f=\left[-1,\dfrac{3}{2}\right]$

2) $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{-2x^2+x+3}}$. $D_f=\{x\in\mathbb{R}/-2x^2+x+3>0\}$

$\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4\times(-2)\times 3=1+24=25=(5)^2>0$

Donc : on a deux racines : $x_1=\dfrac{-1+5}{2\times(-2)}=\dfrac{4}{-4}=-1$ et $x_2=\dfrac{-1-5}{2\times(-2)}=\dfrac{-6}{-4}=\dfrac{3}{2}$

x	$-\infty$		-1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$-2x^2+x+3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc : $D_f=\left]-1,\dfrac{3}{2}\right[$

3) $f(x)=\sqrt{\dfrac{-9x+3}{x+1}}$. $D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/\dfrac{-9x+3}{x+1}\geq 0\ et\ x+1\neq 0\right\}$

$-9x+3=0$ Signifie $-9x=-3$

C'est-à-dire : $x=\dfrac{1}{3}$ et $x+1=0$ signifie ; $x=-1$

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$-9x+3$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{-9x+3}{x+1}$		$-$	‖	$+$	0	$-$	

Donc : $D_f=\left]-1,\dfrac{1}{3}\right]$

4) $f(x)=\dfrac{|x-5|}{x^2+1}$. $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2+1\neq 0\}$

$x^2+1=0$ Signifie $x^2=-1$ Cette équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$

Donc : $D_f=\mathbb{R}$

5) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+2}}{x-1}$. $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x+2\geq 0\ et\ x-1\neq 0\}$

Signifie : $D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,x\ge -2\ et\ x\ne 1\}$

Donc : $D_f=[-2,1[\cup]1,+\infty[$

Exercice2 : Soit la fonction f définie par: $f(x)=\frac{x^3}{|x+2|-|x-2|}$

1) Déterminer le domaine de définition de f
2) Etudier la parité de la fonction f
3) Donner une interprétation graphique

Solution:1) $f(x)=\frac{x^3}{|x+2|-|x-2|}$. $D_f=\{x\in\mathbb{R}\,/\,|x+2|-|x-2|\ne 0\}$

$|x+2|-|x-2|=0$ Signifie $|x+2|=|x-2|$ C'est-à-dire : $x+2=x-2$ ou $x+2=-(x-2)$

Signifie $2=-2$ ou $2x=0$

C'est-à-dire : $2=-2$ (pas de solution) ou $x=0$

Signifie : $x=0$ Donc : $D_f=\mathbb{R}-\{0\}=\mathbb{R}^*$

2)Etude de la parité de la fonction f

☞Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}^*$ alors $-x\in\mathbb{R}^*$

☞ $f(-x)=\frac{(-x)^3}{|-x+2|-|-x-2|}=\frac{-x^3}{|-(x-2)|-|-(x+2)|}=\frac{-x^3}{|x-2|-|x+2|}$ car $|-x|=|x|$

$f(-x)=\frac{-x^3}{-(-|x-2|+|x+2|)}=\frac{x^3}{-|x-2|+|x+2|}=\frac{x^3}{|x+2|-|x-2|}$

Donc : $f(-x)=f(x)$

Donc f est une fonction paire,

3)Interprétation graphique :l'axe des ordonnées est un axe symétrie de la courbe représentative de f

Exercice3: Soit f une fonction numérique tel que : $f(x)=-x^2-2x+1$

1) Préciser le domaine de définition de f
2) Calculer le taux d'accroissement de fonction de f entre x_1 et x_2 tel que : $x_1\ne x_2$
3) Etudier la monotonie de f sur : $I=[-1;+\infty[$ et sur $J=]-\infty;-1]$
4) Dresser le tableau de variation de f
5) En déduire les extrémums de f sur $\mathbb{R}$
6) Trouver les points d'intersection de la courbe (C_f) avec les axes du repère
7) Tracer la courbe représentative (C_f) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

Solution: $f(x)=-x^2-2x+1$

1) f est une fonction polynôme donc : $D_f=\mathbb{R}$

2)Soient : $x_1\in\mathbb{R}$ et $x_2\in\mathbb{R}$ tel que : $x_1\ne x_2$

$$T(x_1;x_2)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{(-x_2^{\,2}-2x_2+1)-(-x_1^{\,2}-2x_1+1)}{x_2-x_1}=\frac{-x_2^{\,2}-2x_2+1+x_1^{\,2}+2x_1-1}{x_2-x_1}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{-x_2^{\,2}+x_1^{\,2}-2(x_2-x_1)}{x_2-x_1}=\frac{-(x_2^{\,2}-x_1^{\,2})-2(x_2-x_1)}{x_2-x_1}$$

$$T(x_1;x_2)=\frac{-(x_2-x_1)(x_2+x_1)-2(x_2-x_1)}{x_2-x_1}=\frac{(x_2-x_1)(-(x_2+x_1)-2)}{x_2-x_1}$$

Par suite : $T(x_1;x_2)=-(x_1+x_2)-2$

3)a) Etude de la monotonie de f sur : $I=[-1;+\infty[$

Soient : $x_1\in[-1;+\infty[$ et $x_2\in[-1;+\infty[$ alors $x_1\geq-1$ et $x_2\geq-1$ implique $x_1+x_2\geq-2$

Donc $-(x_1+x_2)\leq 2$ par suite : $-(x_1+x_2)-2\leq 0$

Donc $T(x_1;x_2)\leq 0$ d'où : f est décroissante sur $I=[-1;+\infty[$

3)b) Etude de la monotonie de f sur : $J=]-\infty;-1]$

Soient : $x_1\in]-\infty;-1]$ et $x_2\in]-\infty;-1]$ alors : $x_1\leq-1$ et $x_2\leq-1$ cela implique $x_1+x_2\leq-2$

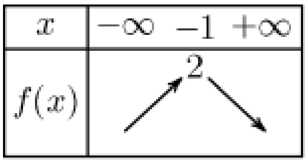
Donc $-(x_1+x_2)\geq 2$ par suite : $-(x_1+x_2)-2\geq 0$

Donc $T(x_1;x_2)\geq 0$

D'où : f est croissante sur $J=]-\infty;-1]$

4) Tableau de variation : On a : $f(-1)=-(-1)^2-2\times(-1)+1=-1+2+1=2$

Donc :



5) $f(-1)=2$ est un maximum de f sur $\mathbb{R}$

6)a) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses.

Les points d'intersection C et D de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'´équation $f(x)=0$.

$f(x)=0$ Signifie $-x^2-2x+1=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\times(-1)\times1=4+4=8>0$

$x_1=\frac{-(-2)+\sqrt{8}}{2\times(-1)}=\frac{-(-2)+2\sqrt{2}}{-2}=\frac{2+2\sqrt{2}}{-2}=-1-\sqrt{2}$ **et** $x_2=\frac{-(-2)-\sqrt{8}}{2\times(-1)}=\frac{-(-2)-2\sqrt{2}}{-2}=\frac{2-2\sqrt{2}}{-2}=-1+\sqrt{2}$

Donc les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses sont :

$A(-1-\sqrt{2};0)$ et $B(-1+\sqrt{2};0)$

b) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées

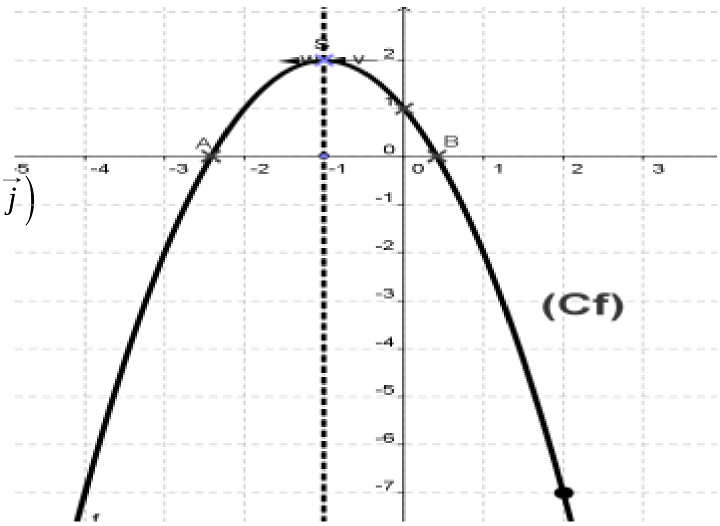
Le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle

Et on a $f(0)=0^2-2\times0+1=1$

Donc le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées est : $C(0;1)$

7) la courbe représentative (C_f) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

-4	**-3**	**-2**	**-1**	**0**	1	2
-7	-2	1	2	1	-2	-7



Exercice4 : Soit f une fonction numérique tel que: $f(x)=2x^2-4x+7$

1) Déterminer D_f et déterminer α et β tel que : $f(x)=2(x-\alpha)^2+\beta$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

2) Déterminer les éléments caractéristiques de (C_f)

3) Déterminer le Tableau de variations de f

4) En déduire les extrémums de f sur $\mathbb{R}$

Solution: $f(x)=2x^2-4x+7$

1) f est une fonction polynôme donc : $D_f=\mathbb{R}$

$f(x)=2(x^2-2x)+7=2(x^2-2\times x\times 1+1^2-1^2)+7$

$f(x)=2((x-1)^2-1)+7=2(x-1)^2-2+7$

Donc ; $f(x)=2(x-1)^2+5$ par suite : : $\alpha=1$ et $\beta=5$ et $a=2$

2)les éléments caractéristiques de (C_f) :

la courbe (C_f) c'est une parabole de sommet $W(1;5)$ et d'axe de symétrie la droite $x=1$.

3)Le Tableau de variations de f :On a $a=2\succ 0$

Donc :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	5	$\nearrow$

4) $f(1)=5$ est un minimum de f sur $\mathbb{R}$

Exercice5 : Soient f et g les deux fonctions définies sur R par :

$f(x)=x^2-2x-1$ et $g(x)=2x-4$

1) Déterminer la forme canonique de $f(x)$ et Déterminer les éléments caractéristiques de (C_f) et déterminer le Tableau de variations de f

2) Tracer Les courbes représentatives de (C_f) et (C_g)

3) Résoudre graphiquement et algébriquement l'équation : $f(x)=g(x)$

4) Résoudre graphiquement et algébriquement l'inéquation ; $f(x)\geq g(x)$

5) Trouver les points d'intersection de la courbe (C_f) avec les axes du repère

Solution: $f(x)=x^2-2x-1$

1) f est une fonction polynôme donc : $D_f=\mathbb{R}$

$f(x)=1(x^2-2x)-1=1(x^2-2\times x\times 1+1^2-1^2)-1$

$f(x)=1((x-1)^2-1)-1=1(x-1)^2-1-1$

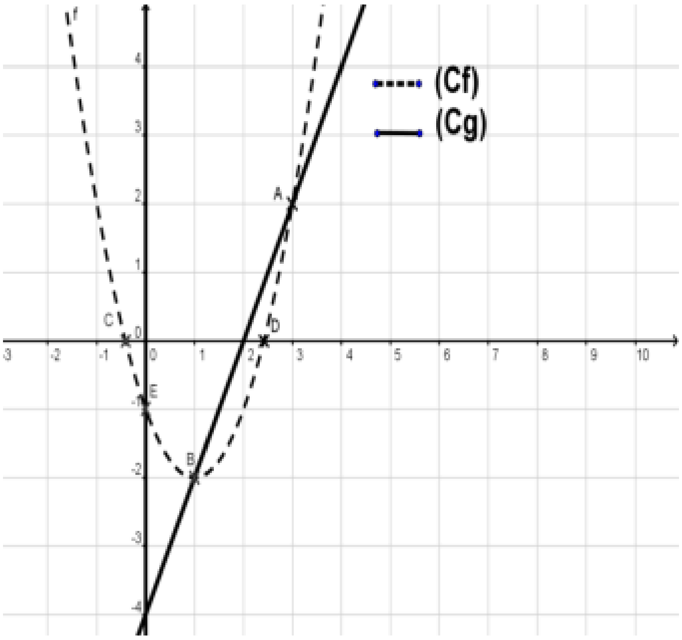
Donc ; $f(x)=1(x-1)^2-2$ par suite : : $\alpha=1$ et $\beta=-2$ et $a=1$

Le Tableau de variations de f :On a $a=1\succ 0$

Donc :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	-2	$\nearrow$

2) Les courbes représentatives $\left(C_f\right)$ et $\left(C_g\right)$ sont données dans le repère ci-dessous :



3) a) Résolution graphique de l'équation $f(x)=g(x)$

Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes $\left(C_f\right)$ et $\left(C_g\right)$

On a donc $x=1$ et $x=3$ donc $S=\{1;3\}$

b) Résolution algébrique de l'équation $f(x)=g(x)$

$f(x)=g(x)$ Signifie : $x^2-2x-1=2x-4$ c'est-à-dire : $x^2-4x+3=0$

$a=1$ et $b=-4$ et $c=+3$

$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times1\times3=16-12=4>0$

Donc **:** $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

C'est-à-dire : $x_1=\dfrac{-(-4)+\sqrt{4}}{2\times1}=\dfrac{4+2}{2}=\dfrac{6}{2}=3$

et $x_2=\dfrac{-(-4)-\sqrt{4}}{2\times1}=\dfrac{4-2}{2}=\dfrac{2}{2}=1$ Donc $S=\{1;3\}$

4) a) Résolution graphique de l'inéquation $f(x)\succ g(x)$:

La courbe $\left(C_f\right)$ est au-dessus de $\left(C_g\right)$ si $x\in\left]-\infty;1\right[\cup\left]3;+\infty\right[$

Donc $S=\left]-\infty;1\right[\cup\left]3;+\infty\right[$

b) Résolution algébrique de l'inéquation $f(x)\succ g(x)$:

$f(x)\succ g(x)$ Signifie $x^2-2x-1\succ 2x-4$

C'est-à-dire : $x^2-4x+3\succ 0$

Les racines sont : $x_1=3$ et $x_2=1$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
x^2-x-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $S=\left]-\infty;1\right[\cup\left]3;+\infty\right[$

5)a) Intersection de la courbe $\left(C_f\right)$ avec l'axe des abscisses.

Les points d'intersection C et D de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'´équation $f(x)=0$.

$f(x)=0$ Signifie $x^2-2x-1=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\times1\times(-1)=4+4=8=\left(2\sqrt{2}\right)^2>0$

$x_1=\dfrac{-(-2)+2\sqrt{2}}{2\times1}=\dfrac{2+2\sqrt{2}}{2}=1+\sqrt{2}$ $\qquad$ $x_2=\dfrac{-(-2)-2\sqrt{2}}{2\times1}=\dfrac{2-2\sqrt{2}}{2}=1-\sqrt{2}$

Donc les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses sont :

$C\left(1-\sqrt{2};0\right)$ et $D\left(1+\sqrt{2};0\right)$

b) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées

Le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle

Et on a $f(0)=0^2-2\times0-1=-1$

Donc le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées est : $E(0;-1)$