PROF: ATMANI NAJIB **DLN°5** 2BAC PC et SVT

http://www.xriadiat.com

Correction du devoir libre de préparation pour le devoir surveillé n°5 : Etudes fonctions

Exercice1 : Soit la fonction f définie par : $f(x)=\frac{\ln x}{x(1-\ln x)}$ et (C_f) la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) a) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f

b) Déterminer les limites aux bornes de D_f

2) Etudier les branches infinies de (C_f)

3) a) Calculer $f'(x)$ $\forall x\in D_f$

b) Vérifier que f est croissante sur $]0;e[$ et $]e;+\infty[$

c) Dresser le tableau de variation de f

4) Construire la courbe (C_f) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

On suppose que : (C_f) admet un point d'inflexion d'abscisse compris entre 0 et 1 sans le déterminer

5)Soit λ un nombre tel que : $\lambda\in]0,1[$ et soit $A(\lambda)$ l'aire du domaine limité par : (C_f) l'axe des abscisses et les droites : $x=\lambda$ et $x=1$

a) Vérifier que $A(\lambda)=-[\ln\lambda+\ln(1-\ln\lambda)]$ ua

b) Calculer $\lim\limits_{\lambda\to0^+}A(\lambda)$

Solution :1) a) $f(x)=\frac{\ln x}{x(1-\ln x)}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/1-\ln x\neq 0\ et\ x\succ 0\}=\{x\in\mathbb{R}/\ln x\neq 1\ et\ x\succ 0\}=\{x\in\mathbb{R}/x\neq e\ et\ x\succ 0\}$

Donc : $D_f=]0;e[\cup]e;+\infty[$

b) Déterminons les limites aux bornes de D_f :

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x(1-\ln x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\times\frac{1}{1-\ln x}=0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$

On a : $1-\ln x\geq 0\Leftrightarrow 1\geq\ln x\Leftrightarrow e\geq x$

$\lim\limits_{x\to e^+}f(x)=\lim\limits_{x\to e^+}\frac{\ln x}{x(1-\ln x)}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to e^-}f(x)=\lim\limits_{x\to e^-}\frac{\ln x}{x(1-\ln x)}=+\infty$

On a : $\lim\limits_{x\to0^+}x(1-\ln x)=\lim\limits_{x\to0^+}x-x\ln x=0^+$ et $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty$

2)Etude des branches infinies de (C_f) :

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0\Rightarrow y=0$ est une asymptote horizontale a la courbe de f au voisinage de $+\infty$

$\lim\limits_{x\to e^+}f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to e^-}f(x)=+\infty\Rightarrow x=e$ est une asymptote verticale a la courbe de f

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty\Rightarrow x=0$ est une asymptote verticale a la courbe de f

3) a) Calculons $f'(x)$

La fonction f est dérivable sur $D_f=]0;e[\cup]e;+\infty[$

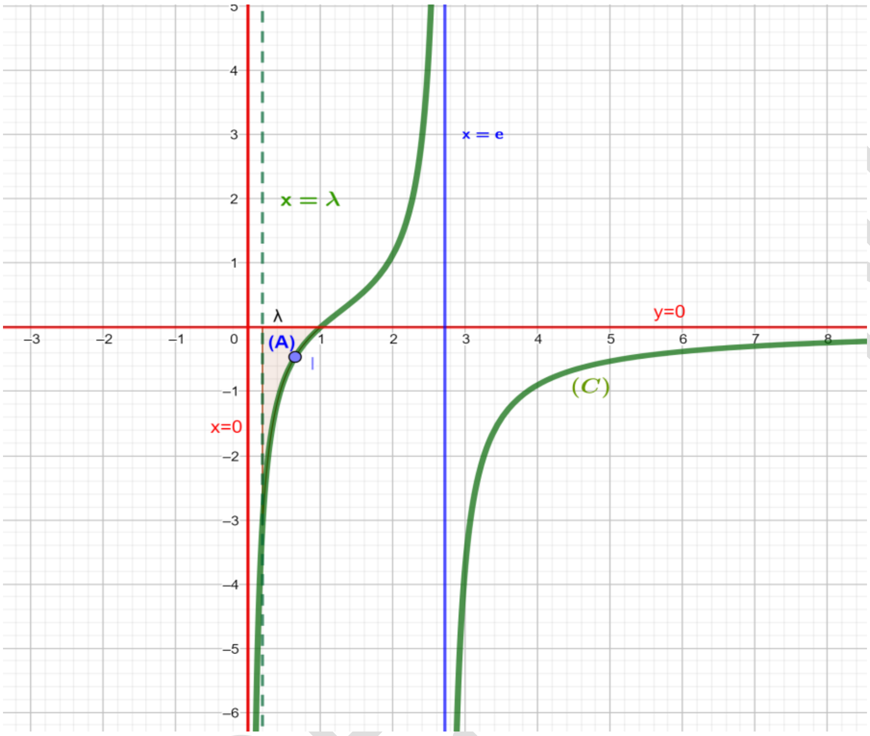
$$f'(x)=\left(\frac{\ln x}{x(1-\ln x)}\right)'=\frac{\frac{1}{x}\left(x(1-\ln x)\right)-\ln x\left(1-\ln x-x\times\frac{1}{x}\right)}{\left(x(1-\ln x)\right)^2}=\frac{1-\ln x+(\ln x)^2}{\left(x(1-\ln x)\right)^2}$$

b) $f'(x)=\dfrac{1-\ln x+(\ln x)^2}{\left(x(1-\ln x)\right)^2}=\dfrac{\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}{\left(x(1-\ln x)\right)^2}\succ 0$: f est donc croissante sur $]0;e[$ et $]e;+\infty[$

c)Dressons le tableau de variation de f :

x	$-\infty$ e	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow 0$

4) Construction de la courbe (C_f) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$:



5) a) Soit λ un nombre tel que : $\lambda\in]0,1[$

Calculons $A(\lambda)$ l'aire du domaine limité par : (C_f) l'axe des abscisses et les droites : $x=\lambda$ et $x=1$

Puisque ; $f(x)\le 0$ si : $x\in]0,1[$

Alors : $A(\lambda)=\int_\lambda^1|f(x)|dx=-\int_\lambda^1 f(x)dx=-\int_\lambda^1\frac{\ln x}{x(1-\ln x)}dx=\int_\lambda^1\frac{(1-\ln x)-1}{x(1-\ln x)}dx$

$$A(\lambda)=\int_\lambda^1\frac{(1-\ln x)}{x(1-\ln x)}-\frac{1}{x(1-\ln x)}dx=\int_\lambda^1\left(\frac{1}{x}-\frac{\frac{1}{x}}{1-\ln x}\right)dx=\int_\lambda^1\left(\frac{1}{x}+\frac{(1-\ln x)'}{1-\ln x}\right)dx=\left[\ln|x|+\ln|1-\ln x|\right]_\lambda^1$$

Donc : $A(\lambda)=-\left(\ln|1-\ln\lambda|+\ln\lambda\right)$ ua

b) Calculons $\lim\limits_{\lambda\to 0^+}A(\lambda)$:

$\lim\limits_{\lambda\to 0^+}A(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to 0^+}-\left(\ln|1-\ln\lambda|+\ln\lambda\right)$ on pose : $-\ln\lambda=X$ si $\lambda\to 0^+$ alors $X\to+\infty$

$$\lim_{\lambda \to 0^+} A(\lambda) = \lim_{X \to +\infty} -\left(\ln|1+X| - X\right) = \lim_{X \to +\infty} -\ln|1+X| + X = \lim_{X \to +\infty} X\left(-(1+X)\frac{\ln(1+X)}{1+X} + 1\right) = +\infty$$

Donc : $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} A(\lambda) = +\infty$

Exercice2 : Partie1 : Soit la fonction g définie sur $]0;+\infty]$ par : $g(x) = 1 - x + \ln x$

1) Etudier les variations de g

2) Déterminer le signe de $g(x)$

Partie2 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x}\ln x - x & si\ x \succ 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1) a) Montrer que f est continue à droite de 0

b) Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite de 0 et donner une *Interprétation géométriquement :*

2) a) Vérifier que : $\forall x > 0$; $f(x) = x\left(\frac{2\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - 1\right)$ et déduire : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

b) Etudier les branches infinies de (C_f) la courbe de f

3)a) Montrer que : $\forall x > 0$; $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} g\left(\sqrt{x}\right)$

b) Déduire les variations de la fonction f puis dresser le tableau des variations

4) Construire la courbe (C_f) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

5)Soit λ un nombre tel que : $\lambda \in]0,1[$

a) En utilisant une intégration par partie calculer l'intégrale suivante : $I = \int_\lambda^1 \sqrt{x}\ln x dx$

b) Calculer : $A(\lambda)$ l'aire du domaine limité par : (C_f) et les droites : $x = \lambda$ et $x = 1$ et $y = -x$

c) Calculer $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} A(\lambda)$

Solution : Partie1 : $\forall x > 0$: $g(x) = 1 - x + \ln x$

1) Etudions les variations de g : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 - x + \ln x = \lim\limits_{x \to +\infty} 1 - x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = -\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} 1 - x + \ln x = -\infty$

g est dérivable sur $]0;+\infty]$: Soit : $x > 0$: $g'(x) = (1 - x + \ln x)' = -1 + \frac{1}{x} = \frac{1-x}{x}$

Le signe de $g'(x)$ est celui de $1 - x$ car $x \in]0;+\infty]$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

D'après le Tableau de variation de g on déduit que 0 est une valeur maximale de g sur $]0;+\infty[$

Donc : $g(x) \le g(1)$; $\forall x \in]0;+\infty]$

Alors : $\forall x \in]0;+\infty]$; $g(x) \le 0$

Partie2 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\begin{cases} f(x)=\sqrt{x}\ln x - x & si\ x \succ 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

1) a) Montrons que f est continue à droite de 0 :

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln x - x = \lim\limits_{x\to 0^+} 2\sqrt{x}\ln\sqrt{x} - x = 0$ car $\lim\limits_{x\to 0^+} X\ln X = 0$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$

Par suite : f est continue à droite de 0

b) Etudions la dérivabilité de la fonction f à droite de 0

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}\ln x - x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}\ln x}{x} - \frac{x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} - 1 = -\infty$

Par suite : $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\infty$

Donc : f n'est pas dérivable à droite de 0

Interprétation géométriquement :

La courbe (C_f) admet une demie tangente vertical à droite du point $O(0;0)$ dirigé vers le bas

Car : $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\infty \quad (+)\times(-)=(-)$

2) a) Vérifions que : $\forall x>0$; $f(x)=x\left(\frac{2\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}-1\right)$

Soit : $x>0 \quad f(x)=\sqrt{x}\ln x - x = 2\sqrt{x}\ln\sqrt{x} - x = x\left(\frac{2\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}-1\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{2\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}-1\right) = -\infty$ cat $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 0$

b) Etudions les branches infinies de (C_f) la courbe de f :

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ calculons : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = ??$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x\left(\frac{2\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}-1\right)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - 1 = -1$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(-x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}\ln x - x + x = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}\ln x = +\infty$

Donc : la courbe (C_f) admet une branche parabolique dans la direction de la droite $(D): y=-x$ au voisinage de $+\infty$

3)a) Montrons que : $\forall x>0$; $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}g\left(\sqrt{x}\right)$

Soit $x>0$; $f'(x)=\left(\sqrt{x}\ln x - x\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x + \sqrt{x}\times\frac{1}{x} - 1 = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln\left(\sqrt{x}\right)^2 + \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 = \frac{\ln\left(\sqrt{x}\right)-\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}g\left(\sqrt{x}\right)$

Donc : $\forall x>0$; $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}g\left(\sqrt{x}\right)$

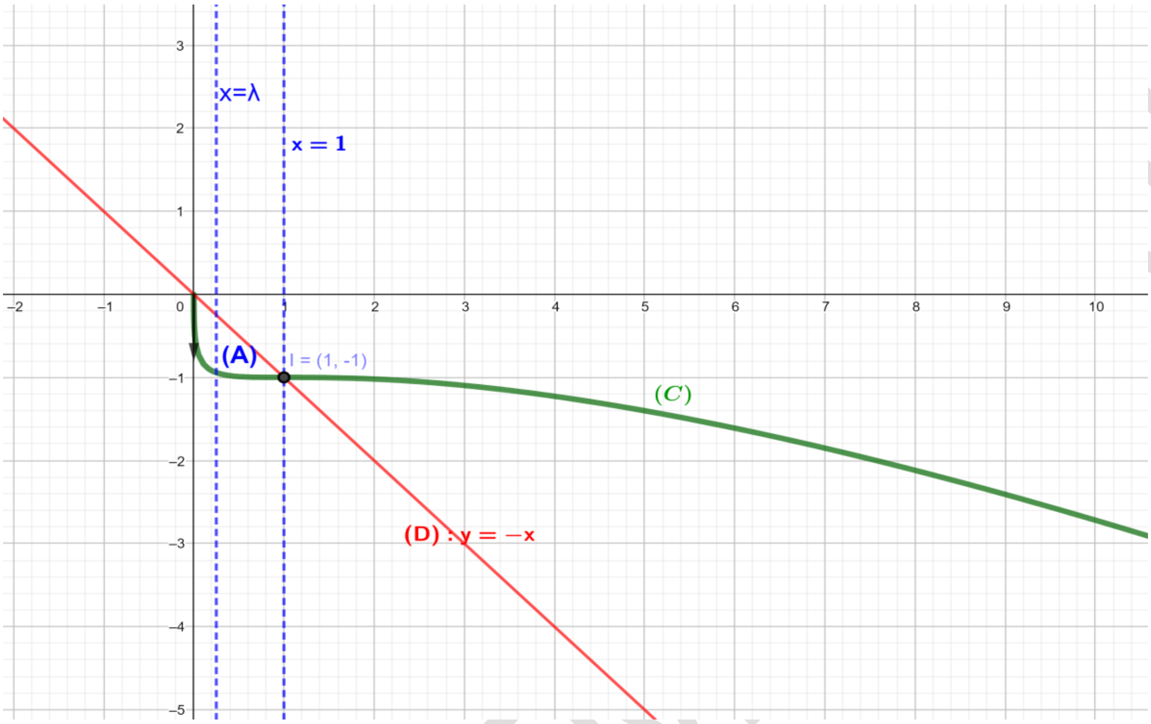
b) Déduction des variations de la fonction f :

Puisque : $\forall x>0$; $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}g\left(\sqrt{x}\right)$ et $\sqrt{x}>0$ et $\forall x\in\left]0;+\infty\right[$; $g(x)\le 0$

Alors : $g\left(\sqrt{x}\right)\leq 0$ et par suite : $\forall x>0$; $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}g\left(\sqrt{x}\right)\leq 0$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$

4) Construction de la courbe $\left(C_f\right)$ dans un repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$



5)Soit λ un nombre tel que : $\lambda\in\left]0,1\right[$

a) En utilisant une intégration par partie calculons l'intégrale suivante : $I=\int_{\lambda}^{1}\sqrt{x}\ln x dx$: ALPES

On pose : $u(x)=\ln x$ et $v'(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$

Donc : $u'(x)=\dfrac{1}{x}$ et $v(x)=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$

$$I=\int_{\lambda}^{1}\sqrt{x}\ln x dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln x\right]_{\lambda}^{1}-\int_{\lambda}^{1}\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\frac{1}{x}dx=-\frac{2}{3}\lambda\sqrt{\lambda}\ln\lambda-\frac{2}{3}\int_{\lambda}^{1}x^{\frac{1}{2}}dx$$

Donc : $I=-\dfrac{2}{3}\lambda\sqrt{\lambda}\ln\lambda-\dfrac{2}{3}\left[\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_{\lambda}^{1}=-\dfrac{2}{3}\lambda\sqrt{\lambda}\ln\lambda-\dfrac{4}{9}+\dfrac{4}{9}\lambda\sqrt{\lambda}$

b) Calculons : $A(\lambda)$ l'aire du domaine limité par : $\left(C_f\right)$ et les droites : $x=\lambda$ et $x=1$ et $y=-x$

$$A(\lambda)=\int_{\lambda}^{1}\left|f(x)+x\right|dx=\int_{\lambda}^{1}\left|f(x)+x\right|dx=\int_{\lambda}^{1}\left|\sqrt{x}\ln x\right|dx=-\int_{\lambda}^{1}\sqrt{x}\ln x dx=-I$$

Donc : $A(\lambda)=\dfrac{2}{3}\lambda\sqrt{\lambda}\ln\lambda-\dfrac{4}{9}\lambda\sqrt{\lambda}+\dfrac{4}{9}\,ua$

c) Calculons : $\lim\limits_{\lambda\to 0^+}A(\lambda)$: $\lim\limits_{\lambda\to 0^+}A(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to 0^+}\dfrac{2}{3}\lambda\sqrt{\lambda}\ln\lambda-\dfrac{4}{9}\lambda\sqrt{\lambda}+\dfrac{4}{9}\,ua=\dfrac{4}{9}\,ua$ car $\lim\limits_{\lambda\to 0^+}\lambda\ln\lambda$

Exercice3 : Partie1 : Soit la fonction g définie par : $g(x)=\ln(x+1)-x$

1) a) Déterminer D_g Calculer les limites aux bornes de D_g

b) Dresser le tableau des variations et en déduire le signe de $g(x)$ sur $[0;+\infty[$

2) Montrer que : $\forall x\in\left]-1;+\infty\right[\ :\ 0\le\ln(x+1)\le x$

Partie2 : Soit la fonction f définie par : $f(x)=x+\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ et (C_f) la courbe de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ tel que : $\|\vec{i}\|=1cm$

1) Montrer que : $D_f=\left]-\infty;-1\right[\cup\left]1;+\infty\right[$

2) a) Montrer que : f est impaire

b) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$

3)a) Montrer que : $\forall x\in D_f\ ;\ f'(x)=\frac{x^2-3}{x^2-1}$

b) Déduire les variations de la fonction f sur $]1;+\infty[$ puis dresser le tableau des variations de f sur D_f

4)a) Vérifier que la droite (Δ) d'équation $y=x$ est une asymptote oblique de (C_f) au voisinage de $+\infty$

a) Etudier le signe de $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ (On remarque que : $\frac{x+1}{x-1}=1+\frac{2}{x-1}$; $\forall x\in D_f$)

b) Déduire la position de (C_f) et la droite (Δ)

5) Construire la courbe (C_f) et (Δ) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ (on suppose : $\sqrt{3}\approx1,7$ et $f(\sqrt{3})\approx3$

6)a) Montrer que : $I=\int_2^4\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)dx=5\ln5-6\ln3$ (On peut utiliser une intégration par partie)

b) En déduire en cm^2 l'aire A du domaine limité par la courbe (C_f) et les droites $x=2$ et $x=4$ et $y=x$

Partie3 : Soit la suite $(u_n)_{n\ge2}$ définie par : $u_n=f(n)-n$; $\forall n\ge2$

1)a) Vérifier que : $u_n=\ln\left(1+\frac{2}{n-1}\right)$; $\forall n\ge2$

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\ge2}$ est décroissante

2)a) Montrer que : $0\le u_n\le\frac{2}{n-1}$; $\forall n\ge2$

b) En déduire la limite de la suite (u_n)

Solution : Partie1 : $\forall x\in[0;+\infty[\ :\ g(x)=\ln(x+1)-x$

1) a) $D_g=\left]-1;+\infty\right[$; $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x+1)-x=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\left(\frac{\ln(x+1)}{x+1}-\frac{x}{x+1}\right)=+\infty(0-1)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to-1^+}g(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\ln(x+1)-x=-\infty$

b) On a : g est dérivable sur $]-1;+\infty[$ car $x\mapsto\ln(x+1)$ et $x\mapsto x$ sont dérivables sur $[0;+\infty[$

Soit $x\in\left]-1;+\infty\right[\ :\ g'(x)=(\ln(x+1)-x)'=\frac{1}{x+1}-1=\frac{1-x-1}{x+1}=\frac{-x}{x+1}$

Le signe de : $g'(x)$ est celui de $-x$ car $x\in\left]-1;+\infty\right[$

Le tableau des variations et en déduire le signe de $g(x)$ sur $]-1;+\infty[$:

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Puisque g admet une valeur minimale en $x_0 = 0$ alors : $g(x) \geq g(0)$

Alors : $g(x) \geq 0 \ \forall x \in]-1;+\infty[$

2) Montrons que : $\forall x \in]-1;+\infty[\ : \ 0 \leq \ln(x+1) \leq x$

On a : $g(x) \geq 0 \ \forall x \in]-1;+\infty[$ alors : $\ln(x+1) - x \geq 0$

Alors : $\ln(x+1) - x \leq 0$ et par suite : $\forall x \in]-1;+\infty[\ : \ 0 \leq \ln(x+1) \leq x$

Partie2 : $f(x) = x + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

1) Montrons que : $D_f =]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{x+1}{x-1} \succ 0 \ et \ \ x-1 \neq 0 \right\}$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$Q(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

Alors : $D_f =]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

2) a) Montrons que : f est impaire

Si $x \in \mathbb{R}$ alors : $-x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = -x + \ln\left(\frac{-x+1}{-x-1}\right) = -x + \ln\left(\frac{-(x-1)}{-(x+1)}\right) = -x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -x - \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = -\left(x + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right) = -f(x)$$

Donc : la fonction f est impaire

b) Calculons : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0$ et donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

On a : $\lim\limits_{x\to1^+} \frac{x+1}{x-1} = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to1^+} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = +\infty$ et donc : $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty$

3)a) Montrons que : $\forall x \in D_f \ ; \ f'(x) = \frac{x^2-3}{x^2-1}$

On a : f est dérivable sur D_f

Soit $x \in]1;+\infty[$: $f'(x) = \left(x + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right)' = 1 + \frac{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)'}{\frac{x+1}{x-1}} = 1 + \frac{-2}{(x-1)^2} \times \frac{x-1}{x+1} = 1 - \frac{2}{x^2-1} = \frac{x^2-3}{x^2-1}$

a) Déduction des variations de la fonction f sur $]1;+\infty[$

$\forall x \in D_f \ ; \ f'(x) = \frac{x^2-3}{x^2-1} = \frac{(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})}{(x+1)(x-1)}$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $x - \sqrt{3}$ car $x \in]1;+\infty[$

x	1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{3}+\ln(2+\sqrt{3})$	$\nearrow$	$+\infty$

4)a) Vérifions que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est une asymptote oblique de (C_f) au voisinage de $+\infty$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = 0$

Donc : la droite (Δ) d'équation $y=x$ est une asymptote oblique de (C_f) au voisinage de $+\infty$

a) Etudions le signe de $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$: On remarque que : $\frac{x+1}{x-1}=1+\frac{2}{x-1}$; $\forall x\in D_f$

Donc : $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\ln\left(1+\frac{2}{x-1}\right)$

Si $x\in\left]1;+\infty\right[$: $1+\frac{2}{x-1}\succ 1$ donc : $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\ln\left(1+\frac{2}{x-1}\right)\succ 0$

Si $x\in\left]-\infty;-1\right[$: $1+\frac{2}{x-1}\prec 1$ donc : $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\ln\left(1+\frac{2}{x-1}\right)\prec 0$

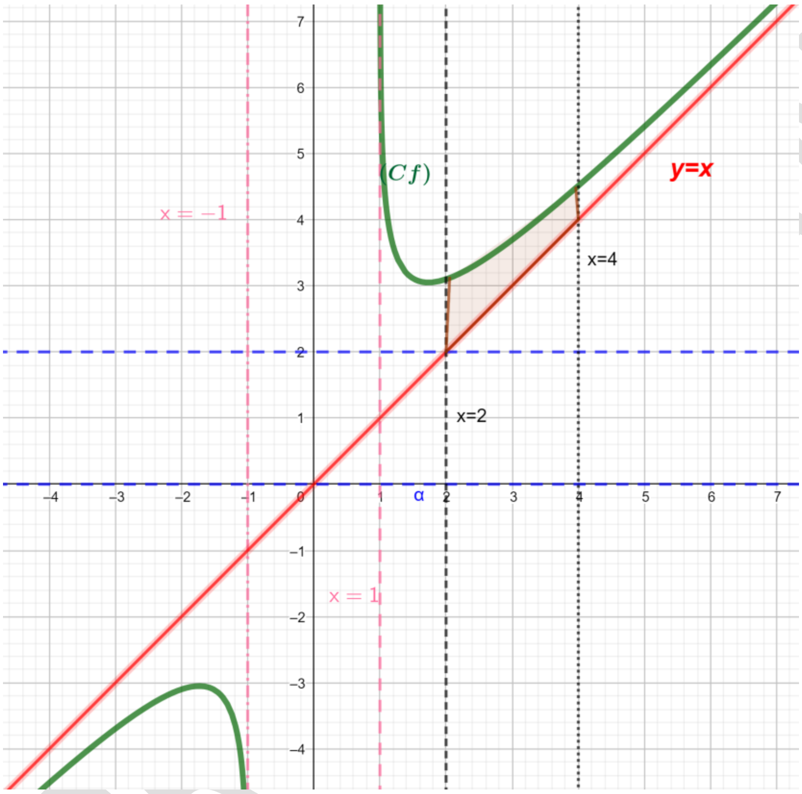
b) Déduction de la position de (C_f) et la droite (Δ) :

Soit $x\in D_f$: $f(x)-x=\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

Si $x\in\left]1;+\infty\right[$: $f(x)-x\succ 0$ donc : (C_f) est au-dessus de la droite (Δ)

Si $x\in\left]-\infty;-1\right[$: $f(x)-x\prec 0$ donc : (C_f) est au-dessous de la droite (Δ)

5) Construction de la courbe (C_f) et (Δ) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$



6)a) Montrons que : $I=\int_2^4 \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)dx=5\ln 5-6\ln 3$

En utilisant une intégration par partie calculons l'intégrale suivante : $I=\int_2^4 \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)dx$

On pose : $u(x)=\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ et $v'(x)=1$

Donc : $u'(x)=\frac{2}{x^2-1}$ et $v(x)=x$

$$I=\int_2^4 \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)dx=\left[x\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right]_2^4-\int_2^4\frac{2x}{x^2-1}dx=4\ln\frac{5}{3}-2\ln 3-\left[\ln\left(x^2-1\right)\right]_2^4$$

Donc : $I = \int_2^4 \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)dx = 4\ln 5 - 4\ln 3 - 2\ln 3 + \ln 15 - \ln 3 = 4\ln 5 - 5\ln 3 + \ln 5 - \ln 3 = \boxed{5\ln 5 - 6\ln 3}$

b) Déduction en cm^2 l'aire A du domaine limité par la courbe (C_f) et les droites $x=2$ et $x=4$ et $y=x$

$A = \int_2^4 |f(x) - x|dx = \int_2^4 (f(x) - x)dx = \int_2^4 \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)dx = (5\ln 5 - 6\ln 3)ua = (5\ln 5 - 6\ln 3)cm^2$

Partie3 : Soit la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ définie par : $u_n = f(n) - n$; $\forall n \geq 2$

1)a) Vérifions que : $u_n = \ln\left(1 + \frac{2}{n-1}\right)$; $\forall n \geq 2$

On a : $\forall n \geq 2$ $u_n = f(n) - n = n + \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) - n = \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) = \ln\left(1 + \frac{2}{n-1}\right)$

b) Montrons que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est décroissante

Soit $n \geq 2$ on a : $u_n = \ln\left(1 + \frac{2}{n-1}\right)$ et $u_{n+1} = \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right)$

On a : $n - 1 \leq n \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n-1} \Rightarrow \frac{2}{n} \leq \frac{2}{n-1} \Rightarrow \frac{2}{n} + 1 \leq \frac{2}{n-1} + 1 \Rightarrow \ln\left(\frac{2}{n} + 1\right) \leq \ln\left(\frac{2}{n-1} + 1\right) \Rightarrow u_{n+1} \leq u_n$

Conclusion : la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est décroissante

2)a) Montrons que : $0 \leq u_n \leq \frac{2}{n-1}$; $\forall n \geq 2$

On a : $u_n = \ln\left(1 + \frac{2}{n-1}\right)$; $\forall n \geq 2$

D'après : **Partie1 :** 2) on a aussi : $\forall x \in]-1; +\infty[$: $0 \leq \ln(x+1) \leq x$ et puisque : $\frac{2}{n-1} \geq 0$: $\forall n \geq 2$

Donc : $\forall n \geq 2$: $0 \leq u_n = \ln\left(1 + \frac{2}{n-1}\right) \leq \frac{2}{n-1}$

b) Déduction de la limite de la suite (u_n) :

On a : $0 \leq u_n \leq \frac{2}{n-1}$; $\forall n \geq 2$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n-1} = 0$ donc : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

Exercice4 : Soit la fonction f définie sur $D_f = [0; +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = x(-1 + \ln x)^2 & ;si \quad x \succ 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

et (C_f) la courbe de f dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1) a) Calculer : $\lim_{x\to 0^+} x(\ln x)^2$ (on pose : $x = t^2$) puis calculer : $\lim_{x\to 0^+} f(x)$

b) Vérifier que f est continue à droite de 0

2) Calculer : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et donner une interprétation géométrique du résultat

3) a) Calculer : $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x}$ et donner une interprétation géométrique du résultat

b) Montrer que : $\forall x \in]0; +\infty[$; $f'(x) = (\ln x - 1)(\ln x + 1)$

c) Etudier les variations de f et dresser le tableau de variation

4) a) Etudier la concavité de la courbe (C_f) et les points d'inflexions s'ils existent

b) Construire la courbe (C_f) dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ($\frac{1}{e} \approx 0,37$ et $e \approx 2,7$)

5) On pose : $I = \int_1^e x \ln x dx$ et $J = \int_1^e x(\ln x)^2 dx$

a) Montrer que : $J = \frac{e^2}{2} - I$ (On peut utiliser une intégration par partie)

b) Calculer : I (On peut utiliser une intégration par partie)

c) En déduire l'aire A du domaine limité par la courbe (C_f) et l'axe des abscisses et les droites $x=1$ et $x=e$

Solution : $D_f=[0;+\infty[$: $\begin{cases} f(x)=x(-1+\ln x)^2 & ;si \quad x\succ 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

1) a) Calculons : $\lim\limits_{x\to 0^+} x(\ln x)^2$: On pose : $x=t^2$

$x=t^2 \Leftrightarrow t=\sqrt{x} \quad x\to 0^+ \Rightarrow t\to 0^+$

$\lim\limits_{x\to 0^+} x(\ln x)^2=\lim\limits_{t\to 0^+} t^2(\ln t^2)^2=\lim\limits_{t\to 0^+} 4t^2(\ln t)^2=\lim\limits_{t\to 0^+} 4(t\ln t)^2=4\times 0=0$ car $\lim\limits_{t\to 0^+} t\ln t=0$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0^+} x(\ln x)^2=0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x(-1+\ln x)^2=\lim\limits_{x\to 0^+} x-2x\ln x+x(\ln x)^2=0$ car $\lim\limits_{x\to 0^+} x(\ln x)^2=0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x=0$

b) Puisque : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0=f(0)$ donc f est continue à droite de 0

2) Calculons : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty} x(-1+\ln x)^2=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x=+\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x(-1+\ln x)^2}{x}=\lim\limits_{x\to +\infty} (-1+\ln x)^2=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x=+\infty$

Interprétation géométrique : la courbe (C_f) admet une branche parabolique dans la direction de l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

3) a) Calculons : $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x(-1+\ln x)^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+} (-1+\ln x)^2=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x=-\infty$ et puisque : $f(0)=0$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}=+\infty$

Par suite f n'est pas dérivable à droite de 0

Interprétation géométriquement : *La* courbe (C_f) admet une demie tangente vertical à droite du point $O(0;0)$ dirigé vers le haut car : $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}=+\infty$ et $(+)\times(+)=(+)$

b) Montrons que : $\forall x\in]0;+\infty[$; $f'(x)=(\ln x-1)(\ln x+1)$

On a : f est dérivable sur $]0;+\infty[$

Soit $x\in]0;+\infty[$: $f'(x)=\left(x(-1+\ln x)^2\right)'=(-1+\ln x)^2+2x(-1+\ln x)\times\frac{1}{x}=(-1+\ln x)(-1+\ln x+2)=(\ln x-1)(\ln x+1)$

c) Etudions les variations de f :On a $\forall x\in]0;+\infty[$; $f'(x)=(\ln x-1)(\ln x+1)$

$lnx-1\geq 0 \Leftrightarrow lnx\geq 1 \Leftrightarrow x\geq e$ et $lnx+1\geq 0 \Leftrightarrow lnx\geq -1 \Leftrightarrow lnx\geq ln\frac{1}{e} \Leftrightarrow x\geq \frac{1}{e}$

Tableau de signe :

x	0		$\frac{1}{e}$		e		$+\infty$
$lnx+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$lnx-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Le tableau de variation :

x	0		$\frac{1}{e}$		e		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4) a) Etudions la concavité de la courbe $\left(C_f\right)$ et les points d'inflexions s'ils existent

On a : $\forall x \in \left]0;+\infty\right[$; $f'(x)=(\ln x-1)(\ln x+1)=(\ln x)^2-1$ et f' est dérivable sur $\left]0;+\infty\right[$

Soit : $x \in \left]0;+\infty\right[$; $f''(x)=\left((\ln x)^2-1\right)'=2\ln x\times(\ln x)'=2\dfrac{\ln x}{x}$: le signe de : $f''(x)$ est celui de $\ln x$ sur $\left]0;+\infty\right[$

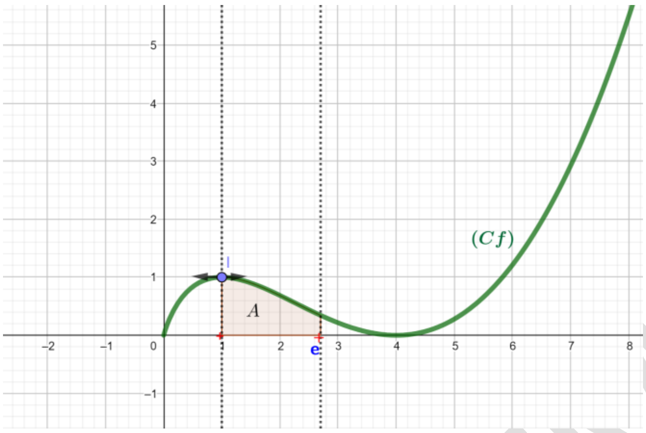
__Tableau de signe de__ $f''(x)$:

x	0		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

- Si : $x \in \left]0;1\right]$ alors : $f''(x)\leq 0$ donc : $\left(C_f\right)$ est concave
- Si : $x \in \left[1;+\infty\right[$ alors : $f''(x)\geq 0$ donc : $\left(C_f\right)$ est convexe

Puisque $f''(x)$ s'annule en $x=1$ et change de signe alors les points $I\left(1;f(1)\right)$ c'est-à-dire : $I(1;1)$ est le point d'inflexion de $\left(C_f\right)$

b) Construction de la courbe $\left(C_f\right)$ dans le repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$:



5) On pose : $I=\int_1^e x\ln x\,dx$ et $J=\int_1^e x(\ln x)^2\,dx$

a) Montrons que : $J=\dfrac{e^2}{2}-I$:En utilisant une intégration par partie : On pose : $u(x)=(\ln x)^2$ et $v'(x)=x$

Donc : $u'(x)=2\dfrac{\ln x}{x}$ et $v(x)=\dfrac{x^2}{2}$

$$J=\int_1^e x(\ln x)^2\,dx=\left[\frac{x^2}{2}(\ln x)^2\right]_1^e-\int_1^e\frac{x^2}{2}2\frac{\ln x}{x}\,dx=\frac{e^2}{2}-\int_1^e x\ln x\,dx$$

Donc : $J=\dfrac{e^2}{2}-I$

b) Calculons : I en utilisant une intégration par partie :

On pose : $u(x)=\ln x$ et $v'(x)=x$

Donc : $u'(x)=\dfrac{1}{x}$ et $v(x)=\dfrac{x^2}{2}$

$$I=\int_1^e x\ln x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e-\int_1^e\frac{x}{2}\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}\right]_1^e=\frac{e^2+1}{4}$$

Donc : $I=\dfrac{e^2+1}{4}$

c) Déduction de l'aire A du domaine limité par la courbe $\left(C_f\right)$ et l'axe des abscisses et les droites $x=1$ et $x=e$

$$A=\int_1^e\left|f(x)\right|dx=\int_1^e\left(x-2x\ln x+x(\ln x)^2\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e-2\int_1^e x\ln x\,dx+\int_1^e x(\ln x)^2\,dx=\frac{e^2-1}{2}-2I+J$$

$$A=\frac{e^2-1}{2}-3I+\frac{e^2}{2}=\boxed{\frac{e^2-5}{4}\,ua}$$

Exercice5 : Partie 1 : Considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=e^{-x}+x-1$

1) Calculer les limites suivantes : $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} g(x)$

2) Etudier les variations de g et en déduire le signe de $g(x)$ et en déduire que : $\forall x\in\mathbb{R};\ e^{-x}+x\geq 1$

Partie 2 : Soit la fonction f définie par : $f(x)=\frac{x}{x+e^{-x}}$ et (C_f) la courbe de f dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) Montrer que : $D_f=\mathbb{R}$

2) a) Montrer que : $f(x)=\frac{1}{1+\frac{1}{xe^{x}}}$ $\forall x\in\mathbb{R}^*$;

b) Calculer : $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ puis donner une interprétation géométrique

3) a) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R};\ f'(x)=\frac{(x+1)e^{-x}}{(x+e^{-x})^2}$

b) Etudier les variations de f et dresser le tableau de variation

4)a) Donner l'équation de la tangente (Δ) a la courbe de f en $x_0=0$

b) Vérifier que : $\forall x\in\mathbb{R};\ x-f(x)=\frac{xg(x)}{g(x)+1}$ et étudier le signe de $x-f(x)$ sur $\mathbb{R}$

c) En déduire la position de la courbe (C_f) avec la droite (Δ) d'équation : $y=x$

5) Construire la courbe (C_f) et la droite (Δ) dans le repère $(O;\vec{i}\ \vec{j})$ ($\frac{1}{1-e}\approx 0,6$)

Partie 3 : Soit la suite (u_n) définie par : $u_0=1$ et $u_{n+1}=f(u_n)$; $(\forall n\in\mathbb{N})$

1) Montrer que :$(\forall n\in\mathbb{N})$; $0\leq u_n\leq 1$

2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer la limite de la suite (u_n)

Solution : Partie1 : $g(x)=e^{-x}+x-1$; $D_g=\mathbb{R}$

1) Calculons les limites suivantes : $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} g(x)$

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} e^{-x}+x-1=+\infty$; car : $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}=0$

$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} e^{-x}+x-1=\lim_{x\to-\infty} x\left(\frac{1}{xe^{x}}+1\right)-1=+\infty$ Car : $\lim_{x\to-\infty} xe^{x}=0^-$

2) Etudions les variations de g et le signe de $g(x)$

Soit $x\in\mathbb{R};\ g'(x)=(e^{-x}+x-1)'=1-e^{-x}$

$1-e^{-x}\geq 0\Leftrightarrow 1\geq e^{-x}\Leftrightarrow e^{0}\geq e^{-x}\Leftrightarrow 0\geq -x\Leftrightarrow x\geq 0$

$1-e^{-x}\leq 0\Leftrightarrow 1\leq e^{-x}\Leftrightarrow e^{0}\leq e^{-x}\Leftrightarrow 0\leq -x\Leftrightarrow x\leq 0$

Tableau de variation de g :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On remarque que : que la fonction g admet une valeur minimale en $x_0=0$

Donc : $g(x)\geq g(0)$ $\forall x\in\mathbb{R}$ $g(0)=0$ Alors : $g(x)\geq 0$; $\forall x\in\mathbb{R}$

Donc : Par suite : $e^{-x}+x-1\geq 0$; $\forall x\in\mathbb{R}$ Par suite : $e^{-x}+x\geq 1$

Partie 2 : $f(x)=\frac{x}{x+e^{-x}}$

1) Montrons que : $D_f = \mathbb{R}$

On a : $\forall x \in \mathbb{R}$: $e^{-x} + x \geq 1$ alors $\forall x \in \mathbb{R}$: $e^{-x} + x \neq 0$

Par suite : $D_f = \mathbb{R}$

2) a) Montrons que : $f(x) = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{xe^x}} \quad \forall x \in \mathbb{R}^*;$

Soit $x \in \mathbb{R}^*$; $f(x) = \dfrac{x}{x + e^{-x}} = \dfrac{x}{x\left(1 + \dfrac{1}{x}e^{-x}\right)} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{xe^x}}$

b) Calculons : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{xe^x}} = 0$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0^-$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{xe^x}} = 1$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^x = +\infty$

Interprétation géométrique :

La droite d'équation : $y = 0$ est une asymptote horizontale à la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$

La droite d'équation : $y = 1$ est une asymptote horizontale à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$

3) a) Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R}$; $f'(x) = \dfrac{(x+1)e^{-x}}{\left(x + e^{-x}\right)^2}$

On a : f est dérivable sur $\mathbb{R}$

Soit : $x \in \mathbb{R}$; $f'(x) = \left(\dfrac{x}{x + e^{-x}}\right)' = \dfrac{x + e^{-x} - x\left(1 - e^{-x}\right)}{\left(x + e^{-x}\right)^2} = \dfrac{x + e^{-x} - x + xe^{-x}}{\left(x + e^{-x}\right)^2} = \dfrac{(x+1)e^{-x}}{\left(x + e^{-x}\right)^2}$

b) Le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ est celui de $x + 1$ car $\dfrac{e^{-x}}{\left(x + e^{-x}\right)^2} \succ 0$

Le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\frac{1}{1-e}$	$\nearrow$	1

4)a) Déterminons l'équation de la tangente a la courbe de f en $x_0 = 0$

Une équation de la droite (Δ) tangente a (C_f) en $x_0 = 0$ est : (Δ) : $y = f'(0)(x - 0) + f(0) = 1x + 0 = x$

b) Vérifions que : $\forall x \in \mathbb{R}$; $x - f(x) = \dfrac{xg(x)}{g(x) + 1}$ et étudions le signe de $x - f(x)$ sur $\mathbb{R}$

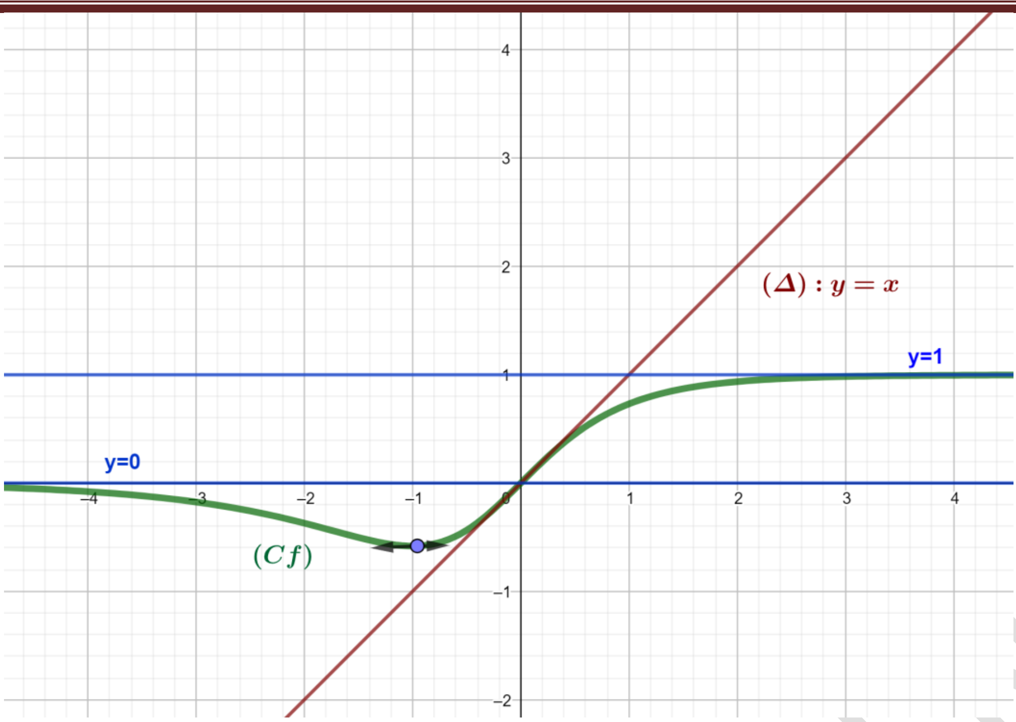
Soit : $x \in \mathbb{R}$; $x - f(x) = x - \dfrac{x}{x + e^{-x}} = \dfrac{x\left(x + e^{-x}\right) - x}{x + e^{-x}} = \dfrac{x\left(e^{-x} + x - 1\right)}{x + e^{-x}} = \dfrac{xg(x)}{g(x) + 1} = x \times \dfrac{g(x)}{g(x) + 1}$

Puisque : $g(x) \geq 0$; $\forall x \in \mathbb{R}$ alors : le signe de $x - f(x)$ est celui de x

Si $x \in [0; +\infty[$: $x - f(x) \geq 0$ donc : la droite (Δ) est au-dessus de (C_f)

Si $x \in]-\infty; 0]$: $f(x) - x \leq 0$ donc : la droite (Δ) est au-dessous de (C_f)

5) Construction de la courbe (C_f) et la droite (Δ)



Partie3 : Partie 3 : Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$; $(\forall n \in \mathbb{N})$

1)Montrons que :$(\forall n \in \mathbb{N})$; $0 \le u_n \le 1$

• On a : $u_0 = 1$ donc $0 \le u_0 \le 1$ c'est-à-dire que la ppté est vraie pour n=0

• Supposons que : $0 \le u_n \le 1$

• Montrons que : $0 \le u_{n+1} \le 1$?

On a : $0 \le u_n \le 1$ et f est croissante sur $[0,1]$alors : $f(0) \le f(u_n) \le f(1)$

C'est-à-dire : $0 \le u_{n+1} \le 1$

Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $0 \le u_n \le 1$

2)Montrons que la suite (u_n) est décroissante :

On a :si $x \in [0,1]$ alors : $f(x) \le x$ et puisque : $0 \le u_n \le 1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

Alors : $f(u_n) \le u_n$ c'est-à-dire:$(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} \le u_n$

Donc : la suite (u_n) est décroissante

3) Puisque : la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 alors elle est convergente vers une limite finie :
$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ et $0 \le l \le 1$

Calculons : la limite de la suite (u_n) :

Puisque : a)(u_n) est convergente b) $u_{n+1} = f(u_{n+1})$et f est continue sur $[0,1]$ c) $f([0,1]) \subset [0,1]$

c) $u_0 = 1 \in [0,1]$ alors :la limite est solutions de l'équation $f(x) = x$ et $0 \le l \le 1$

Puisque l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique 0 alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

Exercice6 : Partie1 : Soit la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=x-\frac{1}{x}-2\ln x$

1) Montrer que : $\forall x\in]0;+\infty[\ :\ g'(x)=\frac{(x-1)^2}{x^2}$ et déduire les variations de g sur $]0;+\infty[$

2) En déduire que : $g(x)\leq 0$ si $x\in]0,1]$ et que $g(x)\geq 0$ si $x\in [1;+\infty[$

Partie2 : Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=x+\frac{1}{x}-(\ln x)^2-2$ et (C_f) la courbe de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ tel que : $\|\vec{i}\|=1cm$

1) a) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$ (on pose : $t=\sqrt{x}$) puis calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b) Vérifier que : $\forall x\in]0;+\infty[\ ;\ f\left(\frac{1}{x}\right)=f(x)$

c) Calculer : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ (on peut poser : $t=\frac{1}{x}$) puis donner une interprétation géométrique

d) Montrer que : (C_f) admet une brache parabolique dans la direction de la droite (Δ) d'équation $y=x$ au voisinage de $+\infty$

2)a) Montrer que : $\forall x\in]0;+\infty[\ ;\ f'(x)=\frac{g(x)}{x}$

b) Déduire les variations de la fonction f sur $]0;+\infty[$ puis dresser le tableau des variations de f

3) Construire la courbe (C_f) et (Δ) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

4)a) Montrer que : $G:x\mapsto x\ln x-x$ est une primitive de $g_1:x\mapsto \ln x$ sur $]0;+\infty[$

b) En utilisant une intégration par partie montrer que : $\int_1^e(\ln x)^2\,dx=e-2$

c) En déduire l'aire A du domaine limité par la courbe (C_f) et l'axe des abscisses et les droites $x=1$ et $x=e$

Solution : Partie1 : $x\in]0;+\infty[: g(x)=x-\frac{1}{x}-2\ln x$

1) On a : g est dérivable sur $]0;+\infty[$ car $x\mapsto \ln x$ et $x\mapsto x$ et $x\mapsto \frac{1}{x}$ sont dérivables sur $]0;+\infty[$

Soit $x\in]0;+\infty[\ :\ g'(x)=\left(x-\frac{1}{x}-2\ln x\right)'=1+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}=\frac{x^2-2x+1}{x^2}=\frac{(x-1)^2}{x^2}\geq 0$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$+$
$g(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$

2) Déduisons que : $g(x)\leq 0$ si $x\in]0,1]$ et que $g(x)\geq 0$ si $x\in [1;+\infty[$

La fonction g est croissante sue $]0,1[$ et $[1;+\infty[$

$x\in]0,1]\Rightarrow 0\prec x\leq 1\Rightarrow g(x)\leq g(1)\Rightarrow g(x)\leq 0$ car $g(1)=1-1-2\ln 1=0$

$x\in [1;+\infty[\Rightarrow x\geq 1\Rightarrow g(x)\geq g(1)\Rightarrow g(x)\geq 0$ car $g(1)=0$

Partie2 : $x\in]0;+\infty[:\ f(x)=x+\frac{1}{x}-(\ln x)^2-2$

1) a) Montrons que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$

On pose : $t=\sqrt{x}\Leftrightarrow t^2=x$: $\quad x\to+\infty\Rightarrow t\to\ +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{(\ln t^2)^2}{t^2}=\lim\limits_{t\to+\infty}4\left(\frac{\ln t}{t}\right)^2=4\times 0=0$ car $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=0$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x\left(1-\frac{(\ln x)^2}{x}\right)+\frac{1}{x}-2=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$

b) Vérifions que : $\forall x\in\left]0;+\infty\right[\,;\ f\left(\frac{1}{x}\right)=f(x)$

Soit : $x\in\left]0;+\infty\right[$: $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}+x-\left(\ln\frac{1}{x}\right)^2-2=\frac{1}{x}+x-(-\ln x)^2-2=\frac{1}{x}+x-(\ln x)^2-2=f(x)$

Donc : $\forall x\in\left]0;+\infty\right[\,;\ f\left(\frac{1}{x}\right)=f(x)$

c) Calculons : $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$

On pose : $t=\frac{1}{x}$ $x\to 0^+\Rightarrow t\to +\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}f\left(\frac{1}{t}\right)=\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=+\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$

Interprétation géométrique : La droite d'équation : $x=0$ est une asymptote verticale à la courbe (C_f)

d) Montrons que : (C_f) admet une brache parabolique dans la direction de la droite (Δ) d'équation $y=x$ au voisinage de $+\infty$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}1-\frac{1}{x^2}-\frac{(\ln x)^2}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-x=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}-(\ln x)^2=-\infty$

Donc : (C_f) admet une brache parabolique dans la direction de la droite (Δ) d'équation $y=x$ au voisinage de $+\infty$

2)a) Montrons que : $\forall x\in\left]0;+\infty\right[\ ;\ f'(x)=\frac{g(x)}{x}$

Soit : $x\in\left]0;+\infty\right[$: $f'(x)=\left(x+\frac{1}{x}-(\ln x)^2-2\right)'=1-\frac{1}{x^2}-2\frac{\ln x}{x}=\frac{1-\frac{1}{x}-2\ln x}{x}=\frac{g(x)}{x}$

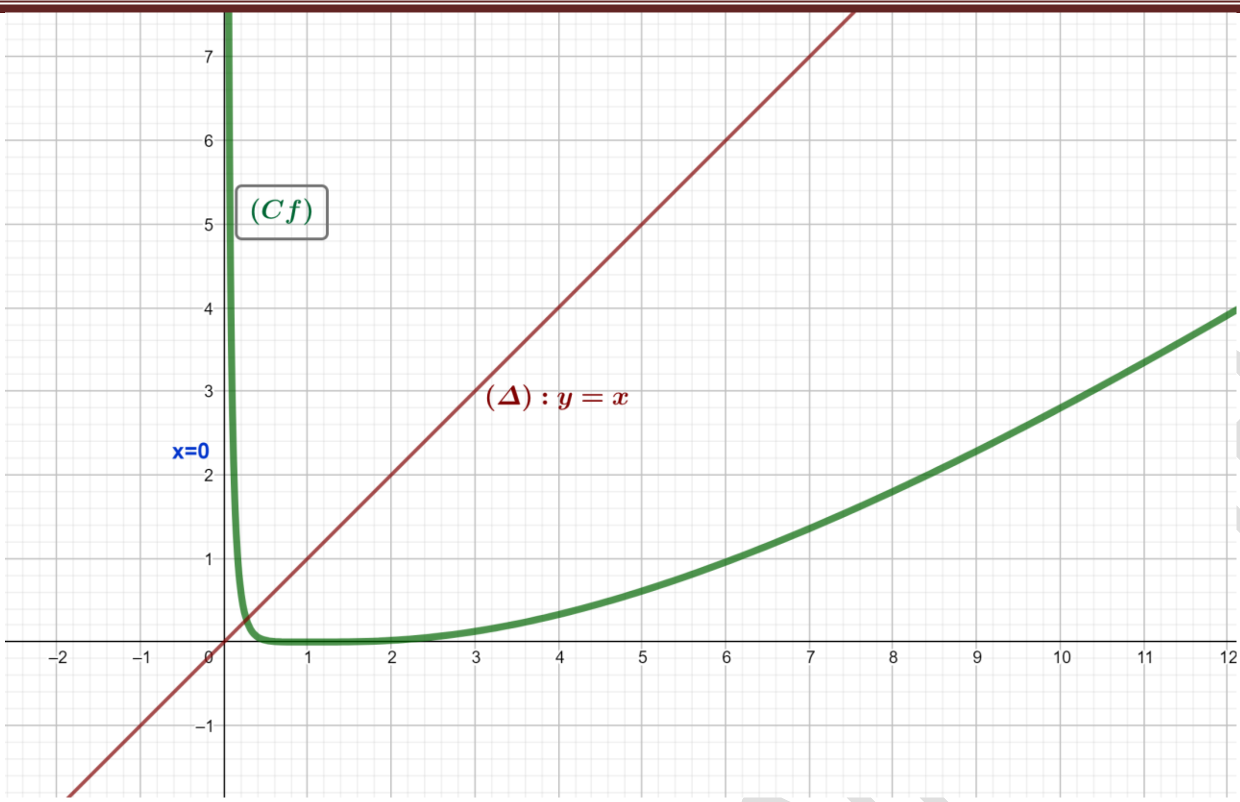
Donc : $\forall x\in\left]0;+\infty\right[\ ;\ f'(x)=\frac{g(x)}{x}$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$ sur $\left]0;+\infty\right[$

Le tableau des variations :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3) Construction de la courbe (C_f) et (Δ) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$



4)a) Montrons que : $G : x \mapsto x\ln x - x$ est une primitive de $g_1 : x \mapsto \ln x$ sur $]0;+\infty[$

$G : x \mapsto x\ln x - x$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $G'(x) = (x\ln x - x)' = \ln x + x\dfrac{1}{x} - 1 = \ln x = g_1(x)$

Donc : $G : x \mapsto x\ln x - x$ est une primitive de $g_1 : x \mapsto \ln x$ sur $]0;+\infty[$

b) Montrons que : $\int_1^e (\ln x)^2\, dx = e - 2$

En utilisant une intégration par partie calculons l'intégrale suivante : $\int_1^e (\ln x)^2\, dx$

On pose : $u(x) = (\ln x)^2$ et $v'(x) = 1$

Donc : $u'(x) = 2\dfrac{\ln x}{x}$ et $v(x) = x$

$$\int_1^e (\ln x)^2\, dx = \left[x(\ln x)^2\right]_1^e - \int_1^e 2\ln x\, dx = \left[x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x\right]_1^e = e - 1$$

b) Déduction de l'aire A du domaine limité par la courbe (C_f) et l'axe des abscisses et les droites $x = 1$ et $x = e$

$$A = \int_1^e |f(x)|dx = \int_1^e \left(x + \frac{1}{x} - (\ln x)^2 - 2\right)dx = \int_1^e \left(x + \frac{1}{x} - 2\right)dx - \int_1^e (\ln x)^2\, dx = \left[\frac{x^2}{2} + \ln x - 2x\right]_1^e - (e-2) = \frac{e^2 - 6e + 9}{2}\ ua$$