PROF: ATMANI NAJIB **DLN°5** 2BAC PC et SVT

http://www.xriadiat.com

Devoir libre de préparation pour le devoir surveillé n°5 : Etudes fonctions

Exercice1 : Soit la fonction f définie par : $f(x)=\frac{\ln x}{x(1-\ln x)}$ et (C_f) la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) a) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f

b) Déterminer les limites aux bornes de D_f

2) Etudier les branches infinies de (C_f)

3) a) Calculer $f'(x)$ $\forall x\in D_f$

b) Vérifier que f est croissante sur $]0;e[$ et $]e;+\infty[$

c) Dresser le tableau de variation de f

4) Construire la courbe (C_f) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

On suppose que : (C_f) admet un point d'inflexion d'abscisse compris entre 0 et 1 sans le déterminer

5)Soit λ un nombre tel que : $\lambda\in]0,1[$ et soit $A(\lambda)$ l'aire du domaine limité par : (C_f) l'axe des abscisses et les droites : $x=\lambda$ et $x=1$

a) Vérifier que $A(\lambda)=-[\ln\lambda+\ln(1-\ln\lambda)]$ ua

b) Calculer $\lim\limits_{\lambda\to 0^+} A(\lambda)$

Exercice2 : Partie1 : Soit la fonction g définie sur $]0;+\infty]$ par : $g(x)=1-x+\ln x$

1) Etudier les variations de g

2) Déterminer le signe de $g(x)$

Partie2 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\begin{cases} f(x)=\sqrt{x}\ln x-x & si\ x\succ 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

1) a) Montrer que f est continue à droite de 0

b) Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite de 0 et donner une *Interprétation géométriquement :*

2) a) Vérifier que : $\forall x>0$; $f(x)=x\left(\frac{2\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}-1\right)$ et déduire : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b) Etudier les branches infinies de (C_f) la courbe de f

3)a) Montrer que : $\forall x>0$; $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}g(\sqrt{x})$

b) Déduire les variations de la fonction f puis dresser le tableau des variations

4) Construire la courbe (C_f) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

5)Soit λ un nombre tel que : $\lambda\in]0,1[$

a) En utilisant une intégration par partie calculer l'intégrale suivante : $I=\int_\lambda^1\sqrt{x}\ln x\,dx$

b) Calculer : $A(\lambda)$ l'aire du domaine limité par : (C_f) et les droites : $x=\lambda$ et $x=1$ et $y=-x$

c) Calculer $\lim\limits_{\lambda\to 0^+} A(\lambda)$

Exercice3: Partie1 : Soit la fonction g définie par : $g(x)=\ln(x+1)-x$

1) a) Déterminer D_g Calculer les limites aux bornes de D_g

b) Dresser le tableau des variations et en déduire le signe de $g(x)$ sur $[0;+\infty[$

2) Montrer que : $\forall x\in\,]-1;+\infty[\;:\;0\le\ln(x+1)\le x$

Partie2 : Soit la fonction f définie par : $f(x)=x+\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ et (C_f) la courbe de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ tel que : $\|\vec{i}\|=1cm$

1) Montrer que : $D_f=]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

2) a) Montrer que : f est impaire

b) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$

3)a) Montrer que : $\forall x\in D_f\;;\;f'(x)=\frac{x^2-3}{x^2-1}$

b) Déduire les variations de la fonction f sur $]1;+\infty[$ puis dresser le tableau des variations de f sur D_f

4)a) Vérifier que la droite (Δ) d'équation $y=x$ est une asymptote oblique de (C_f) au voisinage de $+\infty$

a) Etudier le signe de $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ (On remarque que : $\frac{x+1}{x-1}=1+\frac{2}{x-1}\;;\forall x\in D_f$)

b) Déduire la position de (C_f) et la droite (Δ)

5) Construire la courbe (C_f) et (Δ) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ (on suppose : $\sqrt{3}\approx1,7$ et $f(\sqrt{3})\approx3$

6)a) Montrer que : $I=\int_2^4\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)dx=5\ln5-6\ln3$ (On peut utiliser une intégration par partie)

b) En déduire en cm^2 l'aire A du domaine limité par la courbe (C_f) et les droites $x=2$ et $x=4$ et $y=x$

Partie3 : Soit la suite $(u_n)_{n\ge2}$ définie par : $u_n=f(n)-n\;;\;\forall n\ge2$

1)a) Vérifier que : $u_n=\ln\left(1+\frac{2}{n-1}\right);\;\forall n\ge2$

b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\ge2}$ est décroissante

2)a) Montrer que : $0\le u_n\le\frac{2}{n-1}\;;\;\forall n\ge2$

b) En déduire la limite de la suite (u_n)

Exercice4 : Soit la fonction f définie sur $D_f=[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x)=x(-1+\ln x)^2 & ;si \quad x\succ 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

et (C_f) la courbe de f dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) a) Calculer : $\lim_{x\to 0^+} x(\ln x)^2$ (on pose : $x=t^2$) puis calculer : $\lim_{x\to 0^+} f(x)$

b) Vérifier que f est continue à droite de 0

2) Calculer : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et donner une interprétation géométrique du résultat

3) a) Calculer : $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x}$ et donner une interprétation géométrique du résultat

b) Montrer que : $\forall x\in]0;+\infty[$; $f'(x)=(\ln x-1)(\ln x+1)$

c) Etudier les variations de f et dresser le tableau de variation

4) a) Etudier la concavité de la courbe (C_f) et les points d'inflexions s'ils existent

b) Construire la courbe (C_f) dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ ($\frac{1}{e}\approx 0,37$ et $e\approx 2,7$)

5) On pose : $I=\int_1^e x\ln x dx$ et $J=\int_1^e x(\ln x)^2 dx$

a) Montrer que : $J=\frac{e^2}{2}-I$ (On peut utiliser une intégration par partie)

b) Calculer : I (On peut utiliser une intégration par partie)

c) En déduire l'aire A du domaine limité par la courbe (C_f) et l'axe des abscisses et les droites $x=1$ et $x=e$

Exercice5 : Partie 1 : Considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=e^{-x}+x-1$

1) Calculer les limites suivantes : $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} g(x)$

2) Etudier les variations de g et en déduire le signe de $g(x)$ et en déduire que : $\forall x\in\mathbb{R};\ e^{-x}+x\geq 1$

Partie 2 : Soit la fonction f définie par : $f(x)=\frac{x}{x+e^{-x}}$ et (C_f) la courbe de f dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) Montrer que : $D_f=\mathbb{R}$ 2) a) Montrer que : $f(x)=\frac{1}{1+\frac{1}{xe^x}}$ $\forall x\in\mathbb{R}^*$;

b) Calculer : $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ puis donner une interprétation géométrique

3) a) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R};\ f'(x)=\frac{(x+1)e^{-x}}{(x+e^{-x})^2}$

b) Etudier les variations de f et dresser le tableau de variation

4)a) Donner l'équation de la tangente (Δ) a la courbe de f en $x_0=0$

b) Vérifier que : $\forall x\in\mathbb{R};\ x-f(x)=\frac{xg(x)}{g(x)+1}$ et étudier le signe de $x-f(x)$ sur $\mathbb{R}$

c) En déduire la position de la courbe (C_f) avec la droite (Δ) d'équation : $y=x$

5) Construire la courbe (C_f) et la droite (Δ) dans le repère $(O;\vec{i}\ \vec{j})$ ($\frac{1}{1-e}\approx 0,6$)

Partie 3 : Soit la suite (u_n) définie par : $u_0=1$ et $u_{n+1}=f(u_n)$; $(\forall n\in\mathbb{N})$

1) Montrer que :$(\forall n\in\mathbb{N})$; $0\leq u_n\leq 1$

2) Montrer que la suite (u_n) est décroissante

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer la limite de la suite (u_n)

Exercice6 : Partie1 : Soit la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=x-\frac{1}{x}-2\ln x$

1) Montrer que : $\forall x\in]0;+\infty[$: $g'(x)=\frac{(x-1)^2}{x^2}$ et déduire les variations de g sur $]0;+\infty[$

2) En déduire que : $g(x)\leq 0$ si $x\in]0,1]$ et que $g(x)\geq 0$ si $x\in [1;+\infty[$

Partie2 : Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=x+\frac{1}{x}-(\ln x)^2-2$ et (C_f) la courbe de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ tel que : $\|\vec{i}\|=1cm$

1) a) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$ (on pose : $t=\sqrt{x}$) puis calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b) Vérifier que : $\forall x\in]0;+\infty[$; $f\left(\frac{1}{x}\right)=f(x)$

c) Calculer : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ (on peut poser : $t=\frac{1}{x}$) puis donner une interprétation géométrique

d) Montrer que : (C_f) admet une brache parabolique dans la direction de la droite (Δ) d'équation $y=x$ au voisinage de $+\infty$

2)a) Montrer que : $\forall x\in]0;+\infty[$; $f'(x)=\frac{g(x)}{x}$

b) Déduire les variations de la fonction f sur $]0;+\infty[$ puis dresser le tableau des variations de f

3) Construire la courbe (C_f) et (Δ) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

4)a) Montrer que : $G: x\mapsto x\ln x-x$ est une primitive de $g_1: x\mapsto \ln x$ sur $]0;+\infty[$

b) En utilisant une intégration par partie montrer que : $\int_1^e(\ln x)^2\,dx=e-2$

c) En déduire l'aire A du domaine limité par la courbe (C_f) et l'axe des abscisses et les droites $x=1$ et $x=e$