Exemple : Déterminer les variations de la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 + 2$$

- On calcule la dérivée : $f'(x) = -3x^2 + 6x = 3x(-x+2)$
- On cherche les valeurs qui annulent la dérivée :

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{ou} \quad x = 2$$

- Le signe de $f'(x)$ est celui d'un trinôme du second degré.
  On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	6	$\searrow$	$-\infty$

2) Extremum d'une fonction

Théorème 3 **:** Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I.

- Si $c \in$ I est un extremum local de f sur I alors $f'(c) = 0$
- Si $c \in$ I, $f'(c) = 0$ et si f' change signe en c alors c est un extremum local de f sur I.

Exemple : Sur la fonction $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 2$, étudiée plus haut, la dérivée $f'(x) = 3x(-x+2)$, s'annule et change de signe en 0 et 2. On en déduit que 0 et 2 sont des extremum de f, respectivement minimum et maximum.

Remarque : Les extremum locaux d'une fonction sont à chercher parmi les zéros de la dérivée, mais si $f'(a) = 0$, a n'est pas nécessairement un extremum local. En effet, soit $f(x) = x^3$, sa dérivée $f'(x) = 3x^2$ s'annule en 0 mais ne change pas de signe. 0 n'est pas un extremum local.

Exercices corrigés

Exercice 1 : déterminer le nombre dérivé d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+x$.

1. En utilisant la définition du nombre dérivé, montrer que f est dérivable en 1 et déterminer $f'(1)$.
2. Vérifier le résultat sur la calculatrice.

Solution :

1. Pour tout réel h non nul,n le taux d'accroissement de f entre 1 et $1+h$ est :

$$\tau(h)=\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{(1+h)^2+(1+h)-(1^2+1)}{h}=\frac{3h+h^2}{h}=3+h$$

Or, $\lim_{h\to 0}(3+h)=3$. Donc f est dérivable en 1 et $f'(1)=3$.

Pour trouver la limite de $\tau(h)$ lorsque h tend vers 0, on peut souvent remplacer h par 0 après avoir simplifié l'expression (plus de h au dénominateur).

2.

TI	Casio
Appuyer sur la touche MATH puis 8 (nbreDérivé) : nbreDérivé $=(X^2+X,X,1)$	En mode RUN-MATH, utiliser les instructions F4 (MATH) puis F4 (d/dx) : $\frac{d}{dx}(X^2+X,1)$

Exercice 2 : la même chose, plein de fois

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le nombre dérivé en a (en utilisant la définition) :

1. $f_1(x)=5x-3$ et $a=1$
2. $f_2(x)=3x^2+2x-1$ et $a=2$
3. $f_3(x)=\sqrt{x+3}$ et $a=-1$
4. $f_4(x)=\dfrac{x}{x+1}$ et $a=-2$

Solution :

1. Pour tout $h\neq 0$, le taux d'accroissement de f_1 entre 1 et $1+h$ est : $\tau_1(h)=\dfrac{f_1(1+h)-f_1(1)}{h}$ (*)

$(*)\Leftrightarrow \tau_1(h)=\dfrac{5(1+h)-3-(5\times 1-3)}{h}$

$(*)\Leftrightarrow \tau_1(h)=\dfrac{5h}{h}$

$(*)\Leftrightarrow \tau_1(h)=5$

Or, $\lim_{h\to 0}5=5$, donc f_1 est dérivable en $a=1$ et $f_1'(1)=5$.

2. Pour tout $h\neq 0$, le taux d'accroissement de f_2 entre 2 et $2+h$ est : $\tau_2(h)=\dfrac{f_2(2+h)-f_2(2)}{h}$ (*)

$(*)\Leftrightarrow \tau_2(h)=\dfrac{3(2+h)^2+2(2+h)-1-(3\times 2^2+2\times 2-1)}{h}$

$(*)\Leftrightarrow \tau_2(h)=\dfrac{3h^2+14h}{h}$

$(*)\Leftrightarrow \tau_2(h)=3h+14$

Or, $\lim_{h\to 0}3h+14=14$, donc f_2 est dérivable en $a=2$ et $f_2'(2)=14$.

3. Pour tout $h\neq 0$, le taux d'accroissement de f_3 entre -1 et $-1+h$ est : $\tau_3(h)=\dfrac{f_3(-1+h)-f_3(-1)}{h}$ (*)

$(*)\Leftrightarrow \tau_3(h)=\dfrac{\sqrt{(-1+h)+3}-\sqrt{-1+3}}{h}$

$(*)\Leftrightarrow \tau_3(h)=\dfrac{\left(\sqrt{2+h}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2+h}+\sqrt{2}\right)}{h\times\left(\sqrt{2+h}+\sqrt{2}\right)}$

$(*) \Leftrightarrow \tau_3(h) = \dfrac{2+h-2}{h \times \left(\sqrt{2+h}+\sqrt{2}\right)}$

$(*) \Leftrightarrow \tau_3(h) = \dfrac{h}{h \times \left(\sqrt{2+h}+\sqrt{2}\right)}$

$(*) \Leftrightarrow \tau_3(h) = \dfrac{1}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}}$

Or, $\lim\limits_{h\to 0} \sqrt{2+h}+\sqrt{2} = \sqrt{2}+\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$, donc $\lim\limits_{h\to 0} \tau_3(h) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

Par conséquent, f_3 est dérivable en $a=-1$ et $f_3'(-1) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

4. Pour tout $h \neq 0$, le taux d'accroissement de f_4 entre -2 et $-2+h$ est : $\tau_4(h) = \dfrac{f_4(-2+h)-f_4(-2)}{h}$ (*)

$(*) \Leftrightarrow \tau_4(h) = \dfrac{\dfrac{-2+h}{-2+h+1} - \dfrac{-2}{-2+1}}{h}$

$(*) \Leftrightarrow \tau_4(h) = \dfrac{\dfrac{-2+h}{h-1} - \dfrac{-2}{-1}}{h}$

$(*) \Leftrightarrow \tau_4(h) = \dfrac{\dfrac{-2+h}{h-1} - \dfrac{-2}{-1}}{h}$

$(*) \Leftrightarrow \tau_4(h) = \dfrac{1}{h} \times \dfrac{-2+h}{h-1} - \dfrac{2(h-1)}{h-1}$

$(*) \Leftrightarrow \tau_4(h) = \dfrac{1}{h} \times \dfrac{-h}{h-1}$

$(*) \Leftrightarrow \tau_4(h) = \dfrac{-1}{h-1}$

Or, $\lim\limits_{h\to 0} h-1 = -1$, donc $\lim\limits_{h\to 0} \tau_4(h) = \dfrac{-1}{-1} = 1$.

Par conséquent, f_4 est dérivable en $a=-2$ et $f_4'(-2) = 1$.

Exercice 3 : tangente par le nombre dérivé

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - x$.

1. Déterminer une équation de la tangente $(\mathcal{T})$ à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 1.
2. Vérifier le résultat sur calculatrice.

Solution :

1. Afin de déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 1, déterminons tout d'abord si f est dérivable en 1.
   – Méthode 1 : Calculons la limite du taux d'accroissement τ de f entre 1 et $1+h$. Pour tout $h \neq 0$:

$$\tau(h) = \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{2(1+h)^2-(1+h)-(2\times 1^1-1)}{h} = \frac{2h^2+3h}{h} = 2h+3$$

   Or, $\lim\limits_{h\to 0}(2h+3) = 3$, donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = 3$.

   – Méthode 2 : La fonction f est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur son ensemble de définition et, pour tou x réel, on a

$$f'(x) = 2\times 2x - 1 = 4x-1$$

   En particulier, f est dérivable en 1 et $f'(1) = 4\times 1 - 1 = 3$.

   Nous avons donc montré que f est dérivable en 1 et que $f'(1) = 3$. Par conséquent, la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente non verticale, de coefficient directeur $f'(1) = 3$. Donc $(\mathcal{T})$ a une équation de la forme : $y = 3x+p$.

   Or, $A(1\ ;\ f(1)) \in (\mathcal{T})$, donc $y_A = 3x_A + p$ $(*)$.

   $(*) \Leftrightarrow f(1) = 3\times 1 + p$

   $(*) \Leftrightarrow 2\times 1^2 - 1 = 3+p$

   $(*) \Leftrightarrow 1-3 = p$

   $(*) \Leftrightarrow p = -2$

   La tangente $(\mathcal{T})$ à $\mathcal{C}_f$ au point $A(1\ ;\ f(1))$ a donc pour équation $y = 3x-2$.

TI	Casio
(a) Saisir l'expression de $f(x)$ en Y1 (b) Appuyer sur la touche graphe et choisir l'instruction dessin (2nde PRGM) puis 5 (Tangente) (c) Régler la fenêtre d'affichage (d) Préciser la valeur de x en appuyant sur 1. Valider par ENTER. La tangente s'affiche ainsi qu'une équation (éventuellement approchée).	(a) Choisir l'instruction SET UP (SHIFT MENU). Activer le mode Derivative : choisir ON (F1), suivi de EXE (b) Saisir la fonction en Y1 et tracer la courbe (c) Choisir l'instruction Sketch (SHIFT F4). Sélectionner Tang (F2) (d) Appuyer sur 1 pour sélectionner la valeur de x, puis taper deux fois sur la touche EXE. La tangente s'affiche ainsi qu'une équation (éventuellement approchée).

Exercice 4 : Calculer des nombres dérivés à l'aide des formules

Pour les fonctions suivantes, déterminer le nombre dérivé en $x=2$ puis en $x=\frac{1}{2}$:

1. $f(x)=x^2$
2. $g(x)=x^3$
3. $h(x)=\frac{1}{x}$
4. $i(x)=x^5$
5. $j(x)=\sqrt{x}$

Solution :

1. La fonction f est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur son ensemble de définition. Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a :
$$f'(x)=2x$$
Par conséquent, $f'(2)=2\times 2=4$ et $f'\left(\frac{1}{2}\right)=2\times\frac{1}{2}=1$.
2. La fonction g est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur son ensemble de définition. Pour tout $x \in \mathcal{D}_g$, on a :
$$g'(x)=3x^2$$
Par conséquent, $g'(2)=3\times 2=6$ et $g'\left(\frac{1}{2}\right)=3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.
3. La fonction h est une fonction rationnelle, elle est donc dérivable sur son ensemble de définition. Pour tout $x \in \mathcal{D}_h$, on a :
$$h'(x)=-\frac{1}{x^2}$$
Par conséquent, $h'(2)=-\frac{1}{2^2}=-\frac{1}{4}$ et $h'\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=-4$.
4. La fonction i est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur son ensemble de définition. Pour tout $x \in \mathcal{D}_i$, on a :
$$i'(x)=5x^4$$
Par conséquent, $i'(2)=5\times 2^4=80$ et $i'\left(\frac{1}{2}\right)=5\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{5}{16}$.

5. La fonction j est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$. Pour tout $x>0$, on a :
$$j'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$
Par conséquent, $j'(2)=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$ et $i'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 5 : Tangente en utilisant les formules de dérivation

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$. Soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Déterminer une équation de la tangente $(\mathcal{T})$ à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 1.
2. Existe-t-il une tangente à $\mathcal{C}_f$ parallèle à la droite (d) d'équation$y=3x-4$?
   Si oui, déterminer les coordonnées du point de contact.

Solution :

1. La fonction f est une fon,ction polynôme, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, $f'(x)=2x$.
   Par conséquent, la tangente $(\mathcal{T})$ à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 1 a pour coefficient directeur $f'(1)=2$. Son équation est donc
   $$y=2x+p \text{ avec } p\in\mathbb{R}$$
   De plus, $A(1\ ;\ f(1))\in(\mathcal{T})$, donc $y_A=2x_A+p$, c'est-à-dire $f(1)=2\times 1+p$, d'où $p=1-2=-1$.
   Donc
   $$(\mathcal{T})\ :\ y=2x-1$$
2. La fonction f étant dérivable sur $\mathbb{R}$, le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse x est $f'(x)=2x$.
   S'il existe une tangente parallèle à la droite (d) alors son coefficient directeur est le même que (d), c'est-à-dire 3. On cherche donc un réel x tel que
   $$f'(x)=3\ (*)$$
   $(*)\Leftrightarrow 2x=3$
   $(*)\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$
   Donc $\mathcal{C}_f$ admet une tangente parallèle à (d) au point $M\left(\frac{3}{2}\ ;\ f\left(\frac{3}{2}\right)\right)$ soit $M\left(\frac{3}{2}\ ;\ \frac{9}{4}\right)$.

Exercice 6 : encore une tangente avec un joli calcul de dérivée

Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{2x-3}{x^2+1}$. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f.

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 1.
3. Vérifier le résultat sur calculatrice.

Solution :

1. Pour tout réel x, $x^2+1\neq 0$, donc f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u(x)=2x-3$ et $v(x)=x^2+1$.
   Les fonction su et v sont des fonctions polynômes, elles sont donc dérivables sur leur ensemble de définition $\mathbb{R}$. On a alors, pour tout réel x :
   $u'(x)=2$ et $v'(x)=2x$.
   De plus, la fonction v ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x :
   $$f'(x)=\frac{u'(x)\times v(x)-u(x)\times v'(x)}{v^2(x)}=\frac{2(x^2+1)-(2x-3)\times 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-2x^2+6x+2}{(x^2+1)^2}$$
   La fonction f est donc dérivable en $a=1$ et $f'(1)=\frac{-2\times 1^2+6\times 1+2}{(1^2+1)^2}=\frac{3}{2}$.
   Le coefficient directeur de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 1 est donc $f'(1)=\frac{3}{2}$.
   Donc $\mathcal{T}$ a pour équation $y=\frac{3}{2}x+p$ où $p\in\mathbb{R}$.
   De plus, $A(1;\ f(1))\in\mathcal{T}$, donc $y_A=\frac{3}{2}x_A+p$, soit $\frac{-1}{2}=\frac{3}{2}+p$, donc $p=-2$.
   D'où
   $$\mathcal{T}\ :\ y=\frac{3}{2}x-2$$

3. Voir l'exercice sur la tangente via le nombre dérivé (exercice 3).

Exercice 7 : tangente sans l'expression de la fonction

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative d'une fonction f dérivable en 3. On sait que $f(3) = -2$ et $f'(3) = 0,5$.
Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 3.

Solution :
La fonction f est dérivable en 3, donc la tangente (T) à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 3 a pour équation $y = f'(3)x + p = 0,5x + p$, avec $p \in \mathbb{R}$.
Or, $f(3) = -2$, donc la tangente passe par le point $A(3\ ;\ -2)$. Par conséquent, $y_A = 0,5x_A + p$, soit $-2 = 0,5 \times 3 + p$, d'ù $p = -\frac{7}{2}$.
La tangente (T) a donc pour équation $y = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$.

Exercice 8 : autour du nombre dérivé

Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

1. Calculer $f'(9)$ et $f'(3)$.
2. Existe-t-il des valeurs de x pour lesquelles $f'(x) = 2$?
3. Existe-t-il des valeurs de x pour lesquelles $f'(x) = -1$?

Solution :

1. La fonction f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
   Par conséquent, $f'(9) = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6}$ et $f'(3) = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$.
2. Pour tout $x > O$, $f'(x) = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{16}$.
   Il existe donc un unique réel tel que $f'(x) = 2$: $x = \frac{1}{16}$.
3. Pour tout $x > O$, $f'(x) = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} = -1$. Or, pour tout $x > 0$, $\frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$. Par conséquent, il n'existe pas de réel x tel que $f'(x) = -1$.

Exercice 9 : Tangente et second degré (que du bonheur !)

Soit f la fonction trinôme définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$. On note $\mathcal{P}$ sa courbe représentative.
On sait que $f(0) = 2$; $f(-1) = 5$ et $f'(-1) = 2$.

1. Monter que les réels a, b et c sont solution d'un système de trois équations à trois inconnies. Résoudre ce système.
2. Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{P}$ au point d'abscisse -1.

Solution :

1. $f(0) = 2 \Leftrightarrow a \times 0^2 + b \times 0 + c = 2 \Leftrightarrow c = 2$.
   $f(-1) = 5 \Leftrightarrow a - b + c = 5 \Leftrightarrow a - b = 5 - c \Leftrightarrow a - b = 3$.
   La fonction f est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $f'(x) = 2ax + b$. Donc : $f'(-1) = 2 \Leftrightarrow 2a(-1) + b = 2 \Leftrightarrow -2a + b = 2$.
   Nous devons alors résoudre le système suivant :
   $$\begin{cases} a - b = 3 \\ -2a + b = 2 \end{cases}$$
   Ce système est équivalent à
   $$\begin{cases} a = 3 + b \\ -2(3 + b) + b = 2 \end{cases}$$
   c'est-à-dire
   $$\begin{cases} a = 3 + b \\ b = -8 \end{cases}$$
   Par conséquent, f est définie sur R par $f(x) = -5x^2 - 8x + 2$.
   Vérifications :

(a) $f(0) = 2$

(b) $f(-1) = -5 + 8 + 2 = 5$

(c) $f'(-1) = -10 \times (-1) - 8 = 2$

2. f est dérivable en -1 et $f(-1) = 2$. Donc la tangente à $\mathcal{P}$ au point d'abscisse -1 a pour équation $y = 2x + p$, avec $p \in \mathbb{R}$.
   De plus, cette tangente passe par le point $A(1\ ;\ f(1))$, donc $f(1) = 2 + p$, soit $-5 - 8 + 2 = 2 + p$, d'où $p = -13$.
   La tangente à $\mathcal{P}$ au point d'abscisse -1 a donc pour équation $y = 2x - 13$.