

# Formes indéterminées

Quand on calcule des limites, les formes suivantes sont indéterminées :

Formes indéterminées		
$0 \times \infty$	$\frac{\infty}{\infty}$	$\frac{0}{0}$
$+\infty - \infty$		

## Indéterminations levées par le cours

### Polynômes, fonctions rationnelles

- La limite d'un polynôme en  $+\infty$  ou  $-\infty$  est égale à la limite de son terme de plus haut degré.
- La limite d'une fonction rationnelle en  $+\infty$  ou  $-\infty$  est égale à la limite du quotient de ses termes de plus haut degré.

### Nombres dérivés

Les limites suivantes sont fournies dans le cours. Elles fournissent toutes un nombre dérivé.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x - 1} = 1 \text{ ou } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1.$$

### Théorèmes de croissances comparées

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$ .
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ .

## Quelques techniques usuelles pour lever des indéterminations

### Mise en facteur du terme prépondérant

**Exemple 1.** Trouver  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 - e^x$ .

— On classe les termes par ordre décroissant de prépondérance :  $-e^x + x - 1$

— On met le prépondérant en facteur :  $-e^x \left( 1 - \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x} \right)$

— Puisqu'on a mis le terme prépondérant en facteur, la parenthèse commence par 1 et continue par des termes tendant vers 0 :  $\frac{x}{e^x} = \frac{1}{e^{x/x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ . La parenthèse tend donc vers 1 et l'expression vers  $-\infty$ .

**Exemple 2.** Trouver  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{1+e^x+e^{-x}}$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{1+e^x+e^{-x}}$ .

**Limite en  $+\infty$ .** Pour tout réel  $x \neq 0$ ,  $\frac{x-1}{1+e^x+e^{-x}} = \frac{x-1}{e^x+1+e^{-x}} = \frac{x}{e^x} \times \frac{1-\frac{1}{x}}{1+e^{-x}+e^{-2x}} = \frac{1}{e^x/x} \times \frac{1-\frac{1}{x}}{1+e^{-x}+e^{-2x}}$ .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$  et de même  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0$ . D'autre part  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ . Donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + e^{-x} + e^{-2x}} = 1$ .

D'après un théorème de croissances comparées,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$  et donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x/x} = 0$ .

Finalement,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{1 + e^x + e^{-x}} = 0$ . La mise en facteur des prépondérants a permis de faire apparaître le face à face  $\frac{e^x}{x}$  en  $+\infty$ .

**Limite en  $-\infty$ .** Pour tout réel  $x \neq 0$ ,  $\frac{x-1}{1+e^x+e^{-x}} = \frac{x-1}{e^{-x}+1+e^x} = \frac{x}{e^{-x}} \frac{1-\frac{1}{x}}{1+e^x+e^{2x}} = x e^x \frac{1-\frac{1}{x}}{1+e^x+e^{2x}}$ ,

et on trouve  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{1+e^x+e^{-x}} = 0$ .

**Exemple 3.** Trouver  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 + x} - x$ .

On met le prépondérant en facteur dans  $\sqrt{4x^2 + x}$  pour comprendre que  $\sqrt{4x^2 + x}$  vaut environ  $\sqrt{4x^2} = 2x$  quand  $x$  est grand et donc que l'expression vaut environ  $x$ .

Pour  $x > 0$ ,  $\sqrt{4x^2 + x} - x = \sqrt{4x^2} \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} - x = 2x \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} - x = x \left( 2\sqrt{1 + \frac{1}{4x}} - 1 \right) \dots \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 + x} - x = +\infty$ .

### Utilisation d'une quantité conjuguée

**Exemple 4.** Trouver  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - x$ .

Quand  $x$  est grand,  $\sqrt{x^2 + x}$  vaut environ  $\sqrt{x^2} = x$ . Aucun des termes  $\sqrt{x^2 + x}$  et  $x$  ne va l'emporter devant l'autre. Il faut maintenant voir plus explicitement le face à face  $\sqrt{x^2 + x} - x = x - x$  et pour cela élever au carré  $\sqrt{x^2 + x}$  et  $x$ . C'est le but de la multiplication du numérateur et du dénominateur par la quantité conjuguée.

Pour  $x > 0$ ,  $\sqrt{x^2 + x} - x = \frac{(\sqrt{x^2 + x} - x)(\sqrt{x^2 + x} + x)}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \frac{(x^2 + x) - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x}$ .

L'indétermination était  $+\infty - \infty$ . Elle est maintenant  $\frac{\infty}{\infty}$ . La mise en facteur des prépondérants au numérateur et au dénominateur permet alors de voir que l'expression vaut environ  $\frac{x}{2x}$ .

Pour  $x > 0$ ,  $\frac{x}{x\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + x} = \frac{x}{x} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} \dots \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - x = \frac{1}{2}$ .

### Utilisation d'un taux d'accroissement

**Exemple 5.** Trouver  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x-x^2}$ .

L'indétermination est  $\frac{0}{0}$  qui est l'indétermination typique dans les calculs de nombre dérivé  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  et doit donc éveiller les soupçons. Un certain stock de ces nombres dérivés sont fournis une bonne fois pour toutes en cours.

Ici, on utilise  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$  qui donne la dérivée de la fonction  $x \mapsto \ln(1+x)$  en 0 (ou la dérivée de  $x \mapsto \ln(x)$  en 1).

Pour  $x > -1$  et  $x \neq 0$  et  $x \neq 1$ ,  $\frac{\ln(1+x)}{x-x^2} = \frac{\ln(1+x)}{x} \times \frac{1}{1-x} \dots \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x-x^2} = 1$ .

**Exemple 6.** Trouver  $\lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{2 \sin(x) - 1}{6x - \pi}$ .

De nouveau  $\frac{0}{0}$ . On fait apparaître le taux d'accroissement de la fonction sinus en  $\frac{\pi}{6}$ .

Pour  $x \neq \frac{\pi}{6}$ ,  $\frac{2 \sin(x) - 1}{6x - \pi} = \frac{2}{6} \times \frac{\sin(x) - \frac{1}{2}}{x - \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{3} \frac{\sin(x) - \sin(\frac{\pi}{6})}{x - \frac{\pi}{6}}$ .

Quand  $x$  tend vers  $\frac{\pi}{6}$ ,  $\frac{\sin(x) - \sin(\frac{\pi}{6})}{x - \frac{\pi}{6}}$  tend vers  $\sin' \left( \frac{\pi}{6} \right) = \cos \left( \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \dots \lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{2 \sin(x) - 1}{6x - \pi} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ .