Corréction:Exercices sur Fonctions et sens de variation

Corrigé de l'exercice 1

►**1.** On considère la fonction f définie sur $I = [-1\ ;\ 10]$ par $f(x) = \dfrac{2x-4}{2x+4}$.

a) Justifier que f est définie et dérivable sur I. Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $2x + 4 = 0$.

$$\begin{aligned} 2x+4 &= 0 \\ 2x &= -4 \\ x &= \frac{-4}{2} \\ x &= -2 \end{aligned}$$

Or -2 n'est pas dans l'intervalle $[-1\ ;\ 10]$ et comme f est un quotient de polynômes, alors f est définie et dérivable sur I.

b) Déterminer $f'(x)$ pour tout $x \in [-1\ ;\ 10]$.

$$f'(x) = \frac{2 \times (2x+4) - (2x-4) \times 2}{(2x+4)^2} = \frac{16}{(2x+4)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de f sur I.
Comme $(2x+4)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $16 > 0$ donc pour tout x de I, $f'(x) > 0$.

x	-1	10
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	-3 ↗	$\frac{2}{3}$

►**2.** Étudier le sens de variations de h définie par $h(x) = 3x^3 - \dfrac{9}{2}x^2 - 378x + 6$ sur $[-10\ ;\ 10]$.

$h'(x) = 9x^2 - 9x - 378$
Je dois étudier le signe de $h'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = (-9)^2 - 4 \times 9 \times (-378) = 13\,689$ et $\sqrt{13\,689} = 117$.
Comme $\Delta > 0$, $h'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned} \frac{-(-9) - \sqrt{13\,689}}{2 \times 9} &= \frac{9 - \sqrt{13\,689}}{18} \\ &= \frac{9-117}{18} \\ &= \frac{-108}{18} \\ &= -6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{-(-9) + \sqrt{13\,689}}{2 \times 9} &= \frac{9 + \sqrt{13\,689}}{18} \\ &= \frac{9+117}{18} \\ &= \frac{126}{18} \\ &= 7 \end{aligned}$$

Les racines de h' sont $x_1 = -6$ et $x_2 = 7$.
Comme $\Delta > 0$, $h'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	-10		-6		7		10
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient ainsi le tableau de variation de h.

x	-10		-6		7		10
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	336	$\nearrow$	$1\,464$	$\searrow$	$-\dfrac{3\,663}{2}$	$\nearrow$	$-1\,224$

Corrigé de l'exercice 2

►1. On considère la fonction k définie sur $I = [0\ ;\ 10]$ par $k(x) = \dfrac{x-4}{-x-1}$.

a) Justifier que k est définie et dérivable sur I. Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $-x-1=0$.

$$\begin{aligned}-x-1&=0\\ -x&=1\\ x&=\frac{1}{-1}\\ x&=-1\end{aligned}$$

Or -1 n'est pas dans l'intervalle $[0\ ;\ 10]$ et comme k est un quotient de polynômes, alors k est définie et dérivable sur I.

b) Déterminer $k'(x)$ pour tout $x \in [0\ ;\ 10]$.

$$k'(x) = \frac{11 \times (-x-1) - (x-4) \times (-11)}{(-x-1)^2} = \frac{-5}{(-x-1)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de k sur I.
Comme $(-x-1)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $-5 < 0$ donc pour tout x de I, $k'(x) < 0$. Ainsi, on obtient

x	0		10
$k'(x)$		$-$	
$k(x)$	4	$\searrow$	$-\dfrac{6}{11}$

►2. Étudier le sens de variations de g définie par $g(x) = x^3 - \dfrac{3}{2}x^2 - 60x - 4$ sur $[-10\ ;\ 10]$.
$g'(x) = 3x^2 - 3x - 60$
Je dois étudier le signe de $g'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 3 \times (-60) = 729$ et $\sqrt{729} = 27$.
Comme $\Delta > 0$, $g'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned}\frac{-(-3)-\sqrt{729}}{2\times 3} &= \frac{3-\sqrt{729}}{6}\\ &= \frac{3-27}{6}\\ &= \frac{-24}{6}\\ &= -4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{-(-3)+\sqrt{729}}{2\times 3} &= \frac{3+\sqrt{729}}{6}\\ &= \frac{3+27}{6}\\ &= \frac{30}{6}\\ &= 5\end{aligned}$$

Les racines de g' sont $x_1 = -4$ et $x_2 = 5$.
Comme $\Delta > 0$, $g'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	-10		-4		5		10
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient ainsi le tableau de variation de g.

x	-10		-4		5		10
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	-554	$\nearrow$	148	$\searrow$	$-\dfrac{433}{2}$	$\nearrow$	246

Corrigé de l'exercice 3

►1. On considère la fonction k définie sur $I = [-10\ ;\ 0]$ par $k(x) = \dfrac{-2x+2}{5x-1}$.

a) Justifier que k est définie et dérivable sur I. Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $5x - 1 = 0$.

$$5x - 1 = 0$$
$$5x = 1$$
$$x = \frac{1}{5}$$

Or $\dfrac{1}{5}$ n'est pas dans l'intervalle $[-10\ ;\ 0]$ et comme k est un quotient de polynômes, alors k est définie et dérivable sur I.

b) Déterminer $k'(x)$ pour tout $x \in [-10\ ;\ 0]$.

$$k'(x) = \frac{(-2) \times (5x-1) - (-2x+2) \times 5}{(5x-1)^2} = \frac{-8}{(5x-1)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de k sur I.
Comme $(5x-1)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $-8 < 0$ donc pour tout x de I, $k'(x) < 0$. Ainsi, on obtient

x	-10		0
$k'(x)$		$-$	
$k(x)$	$-\dfrac{22}{51}$	$\searrow$	-2

►2. Étudier le sens de variations de p définie par $p(x) = x^3 + 15x^2 + 63x - 5$ sur $[-10\ ;\ 10]$.
$p'(x) = 3x^2 + 30x + 63$
Je dois étudier le signe de $p'(x)$ qui est un polynôme du second degré.
Je calcule $\Delta = 30^2 - 4 \times 3 \times 63 = 144$ et $\sqrt{144} = 12$.

Comme $\Delta > 0$, $p'(x)$ a deux racines :

$$\frac{-30-\sqrt{144}}{2\times 3} = \frac{-30-\sqrt{144}}{6} = \frac{-30-12}{6} = \frac{-42}{6} = -7$$

$$\frac{-30+\sqrt{144}}{2\times 3} = \frac{-30+\sqrt{144}}{6} = \frac{-30+12}{6} = \frac{-18}{6} = -3$$

Les racines de p' sont $x_1 = -7$ et $x_2 = -3$.
Comme $\Delta > 0$, $p'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	-10		-7		-3		10
$p'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient ainsi le tableau de variation de p.

x	-10		-7		-3		10
$p'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$p(x)$	-135	$\nearrow$	-54	$\searrow$	-86	$\nearrow$	$3\,125$

Corrigé de l'exercice 4

▶**1.** On considère la fonction h définie sur $I = [-1\ ;\ 10]$ par $h(x) = \dfrac{-3x+7}{5x+6}$.

a) Justifier que h est définie et dérivable sur I. Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $5x+6=0$.

$$5x+6=0$$
$$5x=-6$$
$$x=\frac{-6}{5}$$

Or $-\dfrac{6}{5}$ n'est pas dans l'intervalle $[-1\ ;\ 10]$ et comme h est un quotient de polynômes, alors h est définie et dérivable sur I.

b) Déterminer $h'(x)$ pour tout $x \in [-1\ ;\ 10]$.

$$h'(x) = \frac{(-3)\times(5x+6)-(-3x+7)\times 5}{(5x+6)^2} = \frac{-53}{(5x+6)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de h sur I.
Comme $(5x+6)^2$ est un carré, il est toujours positif.
De plus, $-53 < 0$ donc pour tout x de I, $h'(x) < 0$. Ainsi, on obtient

x	-1		10
$h'(x)$		$-$	
$h(x)$	10	$\searrow$	$-\dfrac{23}{56}$

►**2.** Étudier le sens de variations de h définie par $h(x) = 3x^3 - \dfrac{45}{2}x^2 + 36x - 5$ sur $[-10\ ;\ 10]$.

$h'(x) = 9x^2 - 45x + 36$

Je dois étudier le signe de $h'(x)$ qui est un polynôme du second degré.

Je calcule $\Delta = (-45)^2 - 4 \times 9 \times 36 = 729$ et $\sqrt{729} = 27$.

Comme $\Delta > 0$, $h'(x)$ a deux racines :

$$\begin{aligned}\frac{-(-45)-\sqrt{729}}{2\times 9} &= \frac{45-\sqrt{729}}{18}\\ &= \frac{45-27}{18}\\ &= \frac{18}{18}\\ &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{-(-45)+\sqrt{729}}{2\times 9} &= \frac{45+\sqrt{729}}{18}\\ &= \frac{45+27}{18}\\ &= \frac{72}{18}\\ &= 4\end{aligned}$$

Les racines de h' sont $x_1 = 1$ et $x_2 = 4$.

Comme $\Delta > 0$, $h'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	-10		1		4		10
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient ainsi le tableau de variation de h.

x	-10		1		4		10
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-5\,615$	$\nearrow$	$\dfrac{23}{2}$	$\searrow$	-29	$\nearrow$	$1\,105$

Corrigé de l'exercice 5

►**1.** On considère la fonction f définie sur $I = [-10\ ;\ 0]$ par $f(t) = \dfrac{-3t-9}{5t-2}$.

a) Justifier que f est définie et dérivable sur I. Pour déterminer la valeur interdite, on doit résoudre $5t - 2 = 0$.

$$\begin{aligned}5t-2&=0\\ 5t&=2\\ t&=\frac{2}{5}\end{aligned}$$

Or $\dfrac{2}{5}$ n'est pas dans l'intervalle $[-10\ ;\ 0]$ et comme f est un quotient de polynômes, alors f est définie et dérivable sur I.

b) Déterminer $f'(t)$ pour tout $t \in [-10\ ;\ 0]$.

$$f'(t) = \frac{(-3)\times(5t-2)-(-3t-9)\times 5}{(5t-2)^2} = \frac{51}{(5t-2)^2}$$

c) En déduire le sens de variations de f sur I.

Comme $(5t-2)^2$ est un carré, il est toujours positif.

De plus, $51 > 0$ donc pour tout t de I, $f'(t) > 0$.

t	-10	0
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\frac{21}{52}$ ↗	$\frac{9}{2}$

►**2.** Étudier le sens de variations de q définie par $q(x) = x^3 - 21x^2 + 144x + 7$ sur $[-10\ ;\ 10]$.

$q'(x) = 3x^2 - 42x + 144$

Je dois étudier le signe de $q'(x)$ qui est un polynôme du second degré.

Je calcule $\Delta = (-42)^2 - 4 \times 3 \times 144 = 36$ et $\sqrt{36} = 6$.

Comme $\Delta > 0$, $q'(x)$ a deux racines :

$$\frac{-(-42) - \sqrt{36}}{2 \times 3} = \frac{42 - \sqrt{36}}{6} = \frac{42 - 6}{6} = \frac{36}{6} = 6$$

$$\frac{-(-42) + \sqrt{36}}{2 \times 3} = \frac{42 + \sqrt{36}}{6} = \frac{42 + 6}{6} = \frac{48}{6} = 8$$

Les racines de q' sont $x_1 = 6$ et $x_2 = 8$.

Comme $\Delta > 0$, $q'(x)$ est du signe de $-a$ entre les racines. Ainsi

x	-10		6		8		10
$q'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On obtient ainsi le tableau de variation de q.

x	-10		6		8		10
$q'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$q(x)$	$-4\,533$	↗	331	↘	327	↗	347