

# LIMITES DE SUITES

## EXERCICES CORRIGES

### Exercice n°1.

Déterminer la limite (éventuelle) des suites  $(u_n)$  ci-dessous :

1)  $u_n = 1 + \frac{1}{2^n}$

2)  $u_n = \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{3}\right)^n$

3)  $u_n = 7 + \frac{5}{3} \left(-\frac{1}{4}\right)^n$

4)  $u_n = 3 \times (-2)^n$

5)  $u_n = 5^n - 4^n$

6)  $\frac{3^n + 2}{8^n - 1}$

7)  $u_n = \frac{1}{n+3}$

8)  $u_n = \frac{2n}{n+1}$

9)  $u_n = \frac{2n^2 - 3n + 2}{1-n}$

### Exercice n°2.

Montrez que la suite  $(u_n)$  satisfait la relation (R), puis vous en déduisez la limite de cette suite.

a)  $u_n = \frac{\cos n}{n+1}$  (R):  $|u_n| \leq \frac{1}{n+1}$

b)  $u_n = \sin(2n) + n$  (R):  $u_n \geq n - 1$

c)  $u_n = \frac{n + (-1)^n}{n^2 + 1}$  (R):  $|u_n| \leq \frac{n+1}{n^2+1}$

d)  $u_n = \frac{(-1)^n + n}{(-1)^n + 2}$  (R):  $u_n \geq \frac{n-1}{3}$

### Exercice n°3.

On considère une suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 \end{cases}$ . On pose  $v_n = u_n - 3$ .

1) a) Montrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme  $v_0$

b) Exprimer  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$ .

c) En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

2) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ . Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

### Exercice n°4.

Soit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 - n \end{cases}$  pour tout entier naturel  $n$

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $n \leq u_n$ . Qu'en déduit-on ?

### Exercice n°5.

Soit la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{u_n^2 + 12}$

1) a) Déterminer les cinq premiers termes de cette suite.

b) Quel semble être la limite de  $(u_n)$  ?

2) Montrer que la suite  $(v_n)$  définie par  $v_n = u_n^2 - 4$  est géométrique.

En déduire la limite de la suite  $(v_n)$  puis celle de la suite  $(u_n)$

### Exercice n°6.

Soit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \end{cases}$

1) Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que, pour tout  $n$ ,  $0 \leq u_n < 2$

2) On considère la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie pour tout  $n$  par  $v_n = 2 - u_n$

a) Quel est le signe de  $v_n$  ?

b) Montrer que, pour tout entier  $n$ ,  $\frac{v_{n+1}}{v_n} \leq \frac{1}{2}$ , puis à l'aide d'un raisonnement par récurrence que  $v_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

c) En déduire la limite de la suite  $(v_n)$  puis celle de la suite  $(u_n)$

Exercice n°7.

Soit  $(u_n)$  la suite numérique définie sur  $\mathbb{N}$  par 
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4} \end{cases}$$

- 1) a) Montrer que  $(u_n)$  est majorée par 4.
- b) Montrer que  $(u_n)$  est strictement croissante
- c) En déduire que  $(u_n)$  converge et déterminer sa limite.
- 2) a) Montrer que pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$
- b) Retrouver le résultat du 1.c)
- c) Etudier la convergence de la suite  $(v_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $v_n = n^2(4 - u_n)$

Exercice n°8.

On considère la suite  $u$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par 
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3} \end{cases}$$

- 1) Montrer que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq u_n \leq 3$
- 2) Montrer que la suite  $u$  est strictement croissante.
- 3) Montrer que la suite est convergente et déterminer sa limite.

Exercice n°9.

Soit la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 2}$ .

- 1) Donner une valeur approchée à  $10^{-3}$  près des quatre premiers termes de la suite  $(u_n)$
- 2) Montrer par récurrence que pour tout entier  $n$ , si  $0 < u_n < 2$
- 3) Résoudre l'inéquation  $-x^2 + x + 2 \geq 0$
- 4) Exprimer  $u_{n+1} - u_n$  en fonction de  $u_n$ . Déduire de ce qui précède que  $u_{n+1} - u_n \geq 0$  pour tout entier  $n$ . Quel est le sens de variation de la suite  $(u_n)$  ?
- 5) Montrer que pour tout  $n$ ,  $|u_{n+1} - 2| < \frac{1}{2}|u_n - 2|$ .
- 6) En déduire que pour tout  $n$ ,  $|u_n - 2| < \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - 2|$ .
- 7) Que peut-on en conclure sur la convergence de la suite  $(u_n)$  ?

Exercice n°10.

Soit  $\theta$  un réel tel que  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

La suite  $(u_n)$  est définie par :  $u_0 = 2 \cos \theta$  et  $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$  pour tout entier naturel  $n$

- 1) Calculer les trois premiers termes de la suite en fonction de  $\theta$  (On rappelle que, pour tout réel  $x$ , on a :  $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$ )
- 2) Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel  $n$ , on a  $u_n = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$
- 3) Soit  $(v_n)$  la suite définie, pour tout entier naturel  $n$ , par  $v_n = \frac{\theta}{2^n}$ . Déterminer la limite de la suite  $(v_n)$
- 4) En déduire que  $(u_n)$  est convergente ; quelle est sa limite ?

### Exercice n°11.

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par son premier terme  $u_0 > 0$  et la relation :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2} \left( u_n + \frac{3}{u_n} \right)$

1) Démontrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ . Pour quelle valeur de  $u_0$  la suite est-elle stationnaire ?

2) On pose  $u_0 = 1$ .

a) Démontrer les relations suivantes :  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - \sqrt{3} = \frac{1}{2u_n} (u_n - \sqrt{3})^2$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} + \sqrt{3} = \frac{1}{2u_n} (u_n + \sqrt{3})^2$

b) Démontrer que  $(u_n)_n$  est une suite strictement décroissante pour  $n \geq 1$

c) En déduire qu'elle est convergente et calculer sa limite.

3) On définit la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par la relation :  $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{u_n - \sqrt{3}}{u_n + \sqrt{3}}$

a) Calculer  $v_{n+1}$  en fonction de  $v_n$ . En déduire l'expression de  $v_{n+1}$  en fonction de  $v_1$  et de  $n$ .

b) Calculer la limite de  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et retrouver la limite de  $(u_n)_n$

### Exercice n°12.

On définit deux suites  $u$  et  $v$  par  $u_0 = 1, v_0 = 12$  et pour tout entier naturel  $n$  :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) \\ v_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + 3v_n) \end{cases}$$

1) On appelle  $w$  la suite définie pour tout entier naturel  $n$  par  $w_n = v_n - u_n$

a) Montrer que  $w$  est une suite géométrique à termes positifs, dont on précisera la raison

b) Déterminer la limite de la suite  $w$

2) a) Montrer que la suite  $u$  est croissante

b) Montrer que la suite  $v$  est décroissante

c) En déduire que, pour tout entier naturel  $n, u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$

3) Montrer que les deux suites  $u$  et  $v$  convergent et ont la même limite que l'on appellera  $l$

4) On appelle  $t$  la suite définie pour tout entier naturel  $n$  par  $t_n = 3u_n + 8v_n$

a) Montrer que  $t$  est une suite constante. Déterminer cette constante

b) Déterminer alors la valeur de  $l$

### Exercice n°13.

On considère un carré  $F_1$  de côté de longueur 1. Au milieu de chaque côté, à l'extérieur de  $F_1$ , on place un carré de côté  $1/3$ , dont on supprime le côté en contact avec la figure initiale. On obtient ainsi une figure  $F_2$ .



On procède de même avec  $F_2$ . On obtient ainsi une nouvelle figure  $F_3$ . En réitérant le procédé, on construit une suite  $(F_n)$  de figures. On note  $p_n$  le périmètre de  $F_n$ .

1) Tracer  $F_3$ .

2) Exprimer en fonction de  $n$ :

a)  $c_n$ , le nombre de côtés de  $F_n$ .

b)  $l_n$ , la longueur de chaque côté de  $F_n$ .

c)  $p_n$ , le périmètre de  $F_n$ .

3) La suite  $(p_n)$  converge-t-elle?

On note  $A_n$  l'aire de  $F_n$ .

4) Exprimer  $A_{n+1}$  en fonction de  $A_n$ .

5) En déduire  $A_n$  en fonction de  $n$ .

6) Montrer que  $(A_n)$  converge et calculer sa limite.

7) Quelles réflexions vous inspire ce problème?

# LIMITES DE SUITES

## CORRECTION

Exercice n°1

1) Puisque  $2 > 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$  et par suite  $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1}$

2) Puisque  $-1 < \frac{1}{3} < 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$  et puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ , on conclut que  $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}$

3) Puisque  $-1 < -\frac{1}{4} < 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n = 0$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5}{3} \left(-\frac{1}{4}\right)^n = 0$  et par suite  $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 7}$

4) Puisque  $-2 < -1$ , la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par  $v_n = (-2)^n$  n'admet pas de limite, donc  $(u_n)$  non plus

5) On factorise : Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = 5^n - 4^n = 5^n \left(1 - \frac{4^n}{5^n}\right) = 5^n \left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n\right)$

Puisque  $-1 < \frac{4}{5} < 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = 0$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n = 1$  et puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5^n = +\infty$ , on en déduit que  $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty}$

6) On factorise : Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = \frac{3^n + 2}{8^n - 1} = \frac{3^n \left(1 + \frac{2}{3^n}\right)}{8^n \left(1 - \frac{1}{8^n}\right)} = \left(\frac{3}{8}\right)^n \frac{1 + \frac{2}{3^n}}{1 - \frac{1}{8^n}}$

Puisque  $3 > 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{3^n} = 0$  puis  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{2}{3^n} = 1$ . Puisque  $8 > 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 8^n = +\infty$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{8^n} = 0$  puis

$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{8^n} = 1$ . Ainsi,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{2}{3^n}}{1 - \frac{1}{8^n}} = \frac{1}{1} = 1$ . Enfin, puisque  $-1 < \frac{3}{8} < 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{8}\right)^n = 0$

Par produit, on conclut donc que  $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}$

7)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n + 3 = +\infty$  donc par quotient,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n + 3} = 0$ , c'est-à-dire  $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}$

8) On factorise : Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = \frac{2n}{n+1} = \frac{2n}{n \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{2}{1 + \frac{1}{n}}$

Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$ , donc par quotient,  $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2}$

9) On factorise : Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = \frac{2n^2 - 3n + 2}{1 - n} = \frac{n^2 \left(2 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}\right)}{n \left(\frac{1}{n} - 1\right)} = \frac{n \left(2 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}\right)}{\frac{1}{n} - 1}$

Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ , et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ , on conclut que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2} = 2$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} - 1 = -1$

Ainsi,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n} - 1} = -2$ , et par produit, on conclut que  $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty}$

### Exercice n°2

1) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $-1 \leq \cos n \leq 1$ , donc  $-\frac{1}{n} \leq \frac{\cos n}{n+1} \leq \frac{1}{n}$ , c'est-à-dire  $-\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n}$ . Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{n} = 0$  et

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ , le théorème d'encadrement « des gendarmes », nous permet de conclure que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

On pouvait également encadrer la valeur absolue de  $u_n$  : Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq |\cos n| \leq 1$  donc  $0 \leq |u_n| \leq \frac{1}{n+1}$  et

puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ , on en déduit, toujours grâce au même théorème, que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = 0$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

2) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\sin 2n \geq -1$ , donc  $n + \sin 2n \geq n - 1$ . Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n - 1 = +\infty$ , le théorème de minoration nous permet de conclure que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

3) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ , donc  $n - 1 \leq n + (-1)^n \leq n + 1$  donc  $\frac{n-1}{n^2+1} \leq \frac{n+(-1)^n}{n^2+1} \leq \frac{n+1}{n^2+1}$ , c'est-à-dire  $\frac{n-1}{n^2+1} \leq u_n \leq \frac{n+1}{n^2+1}$ . Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-1}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ , le théorème d'encadrement « des gendarmes », nous permet de conclure que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

On pouvait également encadrer la valeur absolue de  $u_n$  : Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq |n + (-1)^n| \leq n + 1$  donc

$0 \leq \left| \frac{n + (-1)^n}{n^2 + 1} \right| \leq \frac{n + 1}{n^2 + 1}$  c'est-à-dire  $0 \leq |u_n| \leq \frac{n + 1}{n^2 + 1}$  et puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n + 1}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ , on en déduit,

toujours grâce au même théorème, que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = 0$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

4) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ , donc  $n + (-1)^n \geq n - 1$ . De plus  $1 \leq (-1)^n + 2 \leq 3$  donc  $1 \geq \frac{1}{(-1)^n + 2} \geq \frac{1}{3}$ . En

multipliant entre elles les inégalités  $1 \geq \frac{1}{(-1)^n + 2} \geq \frac{1}{3}$  et  $n + (-1)^n \geq n - 1$  entre quantités positives, on obtient la

relation R):  $u_n \geq \frac{n-1}{3}$ . Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-1}{3} = +\infty$ , par application du théorème de minoration, on conclut  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

### Exercice n°3

1) a) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\boxed{v_{n+1}} = u_{n+1} - 3 = \frac{1}{3}u_n + 2 - 3 = \frac{1}{3}u_n - 1 = \frac{1}{3}(u_n - 3) = \boxed{\frac{1}{3}v_n}$

La suite  $(v_n)$  est donc géométrique de raison  $q = \frac{1}{3}$  et de premier terme  $v_0 = u_0 - 3 = 6 - 3 = 3$

b) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n = v_0 \times q^n = 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ . Comme  $v_n = u_n - 3$ , on aura  $u_n = v_n + 3 = \boxed{\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 3}$

c) Puisque  $-1 < \frac{1}{3} < 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 0$  c'est-à-dire  $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0}$ . Grâce à l'égalité  $u_n = v_n + 3$ , on déduit  $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3}$

2) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , si on note  $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ , alors  $S_n = v_0 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = 3 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}} = \boxed{\frac{9}{2} \left[ 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \right]}$

Puisque  $-1 < \frac{1}{3} < 1$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right] = 1$  et par suite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{9}{2}$

#### Exercice n°4

Notons  $Q_n$  la propriété «  $n \leq u_n$  » et montrons que la propriété  $Q_n$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$

##### Initialisation :

L'hypothèse  $u_0 = 1 > 0$  assure que la propriété  $Q_0$  est vraie

##### Hérédité

Supposons maintenant la propriété  $Q_p$  vraie pour un certain entier  $p \in \mathbb{N}$ , à savoir  $p \leq u_p$ . On déduit alors de cette inégalité  $2p + 1 - p \leq 2u_p + 1 - p$ , c'est-à-dire  $p + 1 \leq u_{p+1}$ , qui est la propriété  $Q_{p+1}$ .

On a donc  $Q_p \Rightarrow Q_{p+1}$ , ce qui achève la phase d'hérédité.

La propriété est donc vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} n = +\infty$ , on conclut, par minoration, que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

#### Exercice n°5

1) Il est évident que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n > 0$ . On calcule successivement  $u_0 = 0$ ,

$$u_1 = \frac{1}{2}\sqrt{u_0^2 + 12} = \frac{1}{2}\sqrt{0^2 + 12} = \frac{1}{2}\sqrt{12} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} = \sqrt{3} \approx 1,73$$

$$u_2 = \frac{1}{2}\sqrt{u_1^2 + 12} = \frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 12} = \frac{1}{2}\sqrt{15} \approx 1,93,$$

$$u_3 = \frac{1}{2}\sqrt{u_2^2 + 12} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{15}\right)^2 + 12} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{63}{4}} = \frac{1}{4}\sqrt{63} \approx 1,98$$

$$u_4 = \frac{1}{2}\sqrt{u_3^2 + 12} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{4}\sqrt{63}\right)^2 + 12} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{255}{16}} = \frac{1}{8}\sqrt{255} \approx 1,996$$

b) Il semble que la suite  $(u_n)$  tende vers 2

2) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on calcule :

$$v_{n+1} = u_{n+1}^2 - 4 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{u_n^2 + 12}\right)^2 - 4 = \frac{1}{4}(u_n^2 + 12) - 4 = \frac{1}{4}u_n^2 + 3 - 4 = \frac{1}{4}u_n^2 - 1 = \frac{1}{4}(u_n^2 - 4) = \frac{1}{4}v_n$$

La suite  $(v_n)$  est donc géométrique de raison  $\frac{1}{4}$ .

Puisque  $-1 < \frac{1}{4} < 1$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ . De l'égalité  $v_n = u_n^2 - 4$  on tire  $u_n = \pm\sqrt{v_n + 4}$

Mais puisque pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n > 0$ , on a  $u_n = \sqrt{v_n + 4}$ , et puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ , on déduit  $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{4} = 2}$

#### Exercice n°6

Notons  $Q_n$  la propriété «  $n \leq u_n$  » et montrons que la propriété  $Q_n$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$

##### Initialisation :

L'hypothèse  $u_0 = 0$ , c'est-à-dire  $0 \leq u_0 < 2$  assure que la propriété  $Q_0$  est vraie

##### Hérédité

Supposons maintenant la propriété  $Q_p$  vraie pour un certain entier  $p \in \mathbb{N}$ , à savoir  $0 \leq u_p < 2$ . On déduit alors de cette inégalité  $0 + 2 \leq u_p + 2 < 2 + 2$ , puis, par stricte croissance de la fonction racine,  $2 \leq \sqrt{u_p + 2} < \sqrt{4}$  c'est-à-dire

$0 \leq u_{p+1} < 2$ , qui est la propriété  $Q_{p+1}$ . On a donc  $Q_p \Rightarrow Q_{p+1}$ , ce qui achève la phase d'hérédité.

La propriété est donc vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

2) a) Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq u_n < 2 \Leftrightarrow v_n > 0$

b) Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , on calcule :

$$v_{n+1} = 2 - u_{n+1} = 2 - \sqrt{2 + u_n} = \frac{(2 - \sqrt{2 + u_n})(2 + \sqrt{2 + u_n})}{2 + \sqrt{2 + u_n}} \quad (\text{multiplication par la quantité conjuguée})$$

$$= \frac{(2)^2 - (\sqrt{2 + u_n})^2}{2 + \sqrt{2 + u_n}} = \frac{4 - (2 + u_n)}{2 + \sqrt{2 + u_n}} = \frac{2 - u_n}{2 + \sqrt{2 + u_n}} = \frac{v_n}{2 + \sqrt{2 + u_n}}$$

Et puisque pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq u_n$ , alors  $2 + \sqrt{2 + u_n} \geq 2$  et ainsi  $\frac{1}{2 + \sqrt{2 + u_n}} \leq \frac{1}{2}$ .

Par multiplication par  $v_n > 0$ , on conclut  $v_{n+1} = \frac{v_n}{2 + \sqrt{2 + u_n}} = v_n \times \frac{1}{2 + \sqrt{2 + u_n}} \leq v_n \times \frac{1}{2}$ .

Puisque  $v_n > 0$ , l'inégalité  $v_{n+1} \leq v_n \times \frac{1}{2}$  est équivalente à  $\frac{v_{n+1}}{v_n} \leq \frac{1}{2}$

Notons  $Q_n$  la propriété «  $v_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$  »

Initialisation : L'hypothèse  $u_0 = 0 \Leftrightarrow v_0 = 2$ , et le calcul  $\left(\frac{1}{2}\right)^{0-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$  assurent  $v_0 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{0-1}$  c'est-à-dire que la propriété  $Q_0$  est vraie.

Hérédité : Supposons maintenant la propriété  $Q_p$  vraie pour un certain entier  $p \in \mathbb{N}$ , à savoir  $v_p \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{p-1}$ .

On utilise alors l'inégalité  $\frac{v_{p+1}}{v_p} \leq \frac{1}{2}$ , qui nous permet d'écrire :

$$\frac{v_{p+1}}{v_p} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow v_{p+1} \leq \frac{1}{2} \underbrace{v_p}_{\substack{\text{hypothèse de} \\ \text{récurrence}}}$$

$$\Leftrightarrow v_{p+1} \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{p-1}$$

$\Leftrightarrow v_{p+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^p$ , qui est la propriété  $Q_{p+1}$ . On a donc  $Q_p \Rightarrow Q_{p+1}$ , ce qui achève la phase d'hérédité.

La propriété est donc vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

c) Puisque  $v_n > 0$ , on a donc  $0 < v_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ , et puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$ , le théorème des gendarmes permet de conclure que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ , donc que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$

### Exercice n°7

1) a) Démontrons par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq u_n < 4$ . Notons  $Q_n$  la propriété «  $0 \leq u_n < 4$  »

La propriété  $Q_0$  est vraie d'après les données de l'énoncé. Supposons la propriété  $Q_p$  vraie pour un certain entier  $p \in \mathbb{N}$  fixé, c'est-à-dire  $0 \leq u_p < 4$ . On a alors  $3 \times 0 + 4 \leq 3 \times u_p + 4 < 3 \times 4 + 4$ , c'est-à-dire  $4 \leq 3u_p + 4 < 16$  puis  $\sqrt{4} \leq \sqrt{3u_p + 4} < \sqrt{16}$  (par stricte croissance de la fonction racine). On se retrouve donc avec  $0 \leq u_{p+1} < 4$ , qui est la

propriété  $Q_{p+1}$ , ce qui achève la phase d'hérédité et la démonstration par récurrence.

b) Montrons que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n < u_{n+1}$ . Notons  $Q_n$  la propriété «  $u_n < u_{n+1}$  »

On calcule  $u_1 = \sqrt{3u_0 + 4} = \sqrt{3 \times 0 + 4} = \sqrt{4} = 2$ , et ainsi, puisque  $u_0 < u_1$ , la propriété  $Q_1$  est vraie



Supposons la propriété  $Q_p$  vraie pour un certain entier  $p \in \mathbb{N}$  fixé, c'est-à-dire  $u_p < u_{p+1}$

On a alors  $3u_p + 4 < 3u_{p+1} + 4$  puis par stricte croissance de la fonction racine,  $\sqrt{3u_p + 4} < \sqrt{3u_{p+1} + 4}$ , c'est-à-dire  $u_{p+1} < u_{p+2}$ , qui est la propriété  $Q_{p+1}$ , ce qui achève la phase d'hérédité et la démonstration par récurrence.

c) La suite  $(u_n)$  est strictement croissante et majorée (par 4). Elle est donc convergente.

Notons  $L$  la limite  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ . On a alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = L$ , donc  $L$  vérifie l'égalité  $L = \sqrt{3L + 4}$

On résout l'équation  $L = \sqrt{3L + 4} \Rightarrow L^2 = 3L + 4 \Rightarrow L^2 - 3L - 4 = 0$

On trouve  $L = -1$  ou  $L = 4$  en calculant son discriminant.

Comme pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \geq 0$ , la limite de  $(u_n)$  ne peut être que 4. Ainsi,  $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4}$

2) a) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on calcule :

$$\begin{aligned} \frac{4 - u_{n+1}}{4 - u_n} &= \frac{4 - \sqrt{3u_n + 4}}{4 - u_n} = \frac{(4 - \sqrt{3u_n + 4})(4 + \sqrt{3u_n + 4})}{(4 - u_n)(4 + \sqrt{3u_n + 4})} = \frac{4^2 - (\sqrt{3u_n + 4})^2}{(4 - u_n)(4 + \sqrt{3u_n + 4})} \\ &= \frac{16 - (3u_n + 4)}{(4 - u_n)(4 + \sqrt{3u_n + 4})} = \frac{12 - 3u_n}{(4 - u_n)(4 + \sqrt{3u_n + 4})} = \frac{3(4 - u_n)}{(4 - u_n)(4 + \sqrt{3u_n + 4})} = \frac{3}{4 + \sqrt{3u_n + 4}} \end{aligned}$$

Puisque pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \geq 0$ , on aura  $\sqrt{3u_n + 4} \geq \sqrt{4}$  donc  $4 + \sqrt{3u_n + 4} \geq 6$  donc  $\frac{1}{4 + \sqrt{3u_n + 4}} \leq \frac{1}{6}$  et en

multipliant par 3,  $\frac{3}{4 + \sqrt{3u_n + 4}} \leq \frac{3}{6}$ , donc  $\frac{3}{4 + \sqrt{3u_n + 4}} \leq \frac{1}{2}$

Puisque pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n < 4 \Leftrightarrow 4 - u_n > 0$ , l'inégalité  $\frac{4 - u_{n+1}}{4 - u_n} \leq \frac{1}{2}$  est équivalente à  $\boxed{4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)}$

b) Démontrons maintenant par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $4 - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (4 - u_0)$

Notons  $Q_n$  la propriété «  $4 - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (4 - u_0)$  »

La propriété  $Q_0$  est vraie car  $\left(\frac{1}{2}\right)^0 (4 - u_0) = 4 - u_0$

Supposons la propriété  $Q_p$  vraie pour un certain entier  $p \in \mathbb{N}$  fixé, c'est-à-dire  $4 - u_p \leq \left(\frac{1}{2}\right)^p (4 - u_0)$

En multipliant par  $\frac{1}{2}$  les deux membres de l'inégalité, on obtient  $\frac{1}{2}(4 - u_p) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{p+1} (4 - u_0)$ , et puisque

$4 - u_{p+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_p)$ , on obtient  $4 - u_{p+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{p+1} (4 - u_0)$ , qui est la propriété  $Q_{p+1}$ , ce qui achève la phase d'hérédité et la démonstration par récurrence.

Puisque pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 < 4 - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (4 - u_0) \Leftrightarrow 0 < 4 - u_n \leq 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ , et puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ , on applique

le théorème d'encadrement (dit « des gendarmes ») pour conclure que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4 - u_n = 0 \Leftrightarrow \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4}$ .

On retrouve bien le résultat du 1) c)

c) Puisque pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 < 4 - u_n \leq 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ , on obtient  $0 < n^2 (4 - u_n) \leq \frac{4n^2}{2^n}$ . Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n^2}{2^n} = 0$  (par croissance comparée), on applique le théorème d'encadrement (dit « des gendarmes ») pour conclure que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 (4 - u_n) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0}$ .

### Exercice n°8

1) Notons  $P(n)$  la propriété «  $0 \leq u_n \leq 3$  » et démontrons par récurrence sur  $n$  que  $P(n)$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$

Initialisation : La propriété est vraie pour  $n=0$  puisque  $u_0 = 0 \Rightarrow 0 \leq u_0 \leq 3$

Hérédité : Supposons la propriété  $P(n)$  vraie pour un entier  $n$ , c'est-à-dire  $0 \leq u_n \leq 3$ .

On écrit alors successivement :

$$0 \leq u_n \leq 3$$

$$\Rightarrow 2 \times 0 + 3 \leq 2u_n + 3 \leq 2 \times 3 + 3$$

c'est-à-dire  $3 \leq 2u_n + 3 \leq 9$ , et en utilisant la croissance de la fonction racine carrée sur  $[0; +\infty[$ , on obtient

$$\sqrt{3} \leq \sqrt{2u_n + 3} \leq \sqrt{9}, \text{ c'est-à-dire } \sqrt{3} \leq u_{n+1} \leq 3 \text{ donc } 0 \leq u_{n+1} \leq 3, \text{ ce qui prouve que la propriété } P(n+1) \text{ est vraie.}$$

En conclusion, la propriété  $P(n)$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , c'est-à-dire : Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq u_n \leq 3$

2) Notons  $P(n)$  la propriété «  $u_n \leq u_{n+1}$  » et démontrons par récurrence sur  $n$  que  $P(n)$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$

Initialisation :

$$\text{La propriété est vraie pour } n=0 \text{ puisque } u_1 = \sqrt{2u_0 + 3} = \sqrt{3} \Rightarrow u_0 \leq u_1$$

Hérédité :

Supposons la propriété  $P(n)$  vraie pour un entier  $n$ , c'est-à-dire  $u_n \leq u_{n+1}$ .

On écrit alors successivement :

$$u_n \leq u_{n+1}$$

$$\Rightarrow 2 \times u_n + 3 \leq 2u_{n+1} + 3,$$

et utilisant la croissance de la fonction racine carrée sur  $[0; +\infty[$ , on obtient  $\sqrt{2 \times u_n + 3} \leq \sqrt{2u_{n+1} + 3}$ , c'est-à-dire  $u_{n+1} \leq u_{n+2}$ , ce qui prouve que la propriété  $P(n+1)$  est vraie.

En conclusion, la propriété  $P(n)$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , c'est-à-dire : La suite  $u$  est strictement croissante.

3) Puisque  $u$  est strictement croissante et majorée, elle converge vers une limite  $l$ .

Puisque pour tout entier  $n$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$  avec  $f : x \rightarrow \sqrt{2x+3}$ , qui est continue sur  $[0; +\infty[$ , la limite  $l$  vérifie  $l = f(l)$ . On résout l'équation  $l = \sqrt{2l+3} \Leftrightarrow l^2 - 2l - 3 = 0$  et  $l > 0$ , en calculant le discriminant de l'équation. On

obtient  $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16 = 4^2$ , donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes.  $l_1 = \frac{2 - \sqrt{16}}{2} = -1$  et

$l_2 = \frac{2 + \sqrt{16}}{2} = 3$ . La condition  $l > 0$  (et par ailleurs le fait que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \geq 0$ ) entraîne le fait que :

la limite de la suite  $u$  est 3.

### Exercice n°9

1) On calcule successivement  $u_0 = 1$ ,  $u_1 = \frac{3u_0 + 2}{u_0 + 2} = \frac{3 \times 1 + 2}{1 + 2} = \frac{5}{3}$ ,  $u_2 = \frac{3u_1 + 2}{u_1 + 2} = \frac{3 \times \frac{5}{3} + 2}{\frac{5}{3} + 2} = \frac{7}{\frac{11}{3}} = \frac{21}{11}$  et

$$u_3 = \frac{3u_2 + 2}{u_2 + 2} = \frac{3 \times \frac{21}{11} + 2}{\frac{21}{11} + 2} = \frac{\frac{85}{11}}{\frac{43}{11}} = \frac{85}{43} = \frac{85}{43} \times \frac{11}{43} = \frac{85}{43}$$

2) Notons  $Q_n$  la propriété «  $0 < u_n < 2$  ». La propriété  $Q_0$  est vraie d'après les hypothèse de l'énoncé.

Supposons la propriété  $Q_p$  vraie pour un certain entier  $p \in \mathbb{N}$ , à savoir  $0 < u_p < 2$ .

Alors  $u_{p+1} - 2 = \frac{3u_p + 2}{u_p + 2} - 2 = \frac{3u_p + 2 - 2(u_p + 2)}{u_p + 2} = \frac{u_p - 2}{u_p + 2}$ . Puisque  $0 < u_p < 2$ , on peut en déduire que  $u_{p+1} - 2 < 0$ ,

donc que  $u_{p+1} < 2$ . D'autre part  $u_{p+1} > 0$  car  $u_p > 0$ .

Ainsi, on trouve la propriété  $Q_{p+1}$ , ce qui achève la phase d'hérédité et la démonstration par récurrence

3) On calcule le discriminant du polynôme  $P(x) = -x^2 + x + 2$  :  $\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times 2 = 9$ . Le polynôme admet deux

racines distinctes réelles qui sont  $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{9}}{2 \times (-1)} = -1$  et  $x_2 = \frac{-1 - \sqrt{9}}{2 \times (-1)} = 2$

D'après la règle du signe d'un trinôme du second degré,  $P(x) < 0$  sur  $]-\infty; -1[ \cup ]2; +\infty[$ ,  $P(x) > 0$  sur  $]1; 2[$

4) On calcule  $u_{n+1} - u_n$  : Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n + 2}{u_n + 2} - u_n = \frac{3u_n + 2 - u_n(u_n + 2)}{u_n + 2} = \frac{-u_n^2 + u_n + 2}{u_n + 2}$

Puisque pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq u_n \leq 2$  et puisque pour tout  $x \in [0, 2]$ ,  $-x^2 + x + 2 \geq 0$ , on substitue  $u_n$  à  $x$

Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} - u_n \geq 0$ . La suite  $(u_n)$  est donc croissante.

5) Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , on calcule  $\frac{u_{n+1} - 2}{u_n - 2} = \frac{\frac{3u_n + 2}{u_n + 2} - 2}{u_n - 2} = \frac{\frac{3u_n + 2 - 2(u_n + 2)}{u_n + 2}}{u_n - 2} = \frac{u_n - 2}{(u_n + 2)(u_n - 2)}$

Puisque pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \neq 2$ , on peut simplifier  $\frac{u_{n+1} - 2}{u_n - 2} = \frac{u_n - 2}{(u_n + 2)(u_n - 2)} = \frac{1}{u_n + 2}$

Puisque pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 < u_n < 2$ , on aura  $2 < u_n + 2 < 4$  donc  $\frac{1}{4} < \frac{1}{u_n + 2} < \frac{1}{2}$ , ainsi que  $\frac{u_{n+1} - 2}{u_n - 2} > 0$ , donc

$\frac{|u_{n+1} - 2|}{|u_n - 2|} = \left| \frac{u_{n+1} - 2}{u_n - 2} \right| = \frac{u_{n+1} - 2}{u_n - 2}$  car  $\frac{u_{n+1} - 2}{u_n - 2} > 0$ . Finalement,  $\frac{|u_{n+1} - 2|}{|u_n - 2|} = \frac{u_{n+1} - 2}{u_n - 2} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow |u_{n+1} - 2| < \frac{1}{2} |u_n - 2|$

6) Notons  $Q_n$  la propriété «  $|u_n - 2| < \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - 2|$  »

La propriété  $Q_0$  est vraie d'après les hypothèse de l'énoncé, car  $\left(\frac{1}{2}\right)^0 |u_0 - 2| = |u_0 - 2|$

Supposons la propriété  $Q_p$  vraie pour un certain entier  $p \in \mathbb{N}$ , à savoir  $|u_p - 2| < \left(\frac{1}{2}\right)^p |u_0 - 2|$ .

Alors en multipliant chaque membre de l'inégalité  $|u_p - 2| < \left(\frac{1}{2}\right)^p |u_0 - 2|$  par  $\frac{1}{2}$ , on obtient  $\frac{1}{2} |u_p - 2| < \left(\frac{1}{2}\right)^{p+1} |u_0 - 2|$

Et puisque  $|u_{p+1} - 2| < \frac{1}{2} |u_p - 2|$ , on en déduit  $|u_{p+1} - 2| < \left(\frac{1}{2}\right)^{p+1} |u_0 - 2|$ , qui est la propriété  $Q_{p+1}$

Ceci achève la phase d'hérédité et la démonstration par récurrence.

7) La suite  $(u_n)$  est croissante et majorée. Elle est donc convergente.

Pour déterminer sa limite, on peut :

- soit utiliser la propriété : Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|u_n - 2| < \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - 2|$ . Puisque  $-1 < \frac{1}{2} < 1$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$  donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - 2| = 0 \Leftrightarrow \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2}$$

- soit noter sa limite L. Puisque  $(u_n)$  est définie par  $u_{n+1} = f(u_n)$ , avec  $f(x) = \frac{3x+2}{x+2}$  qui est continue sur  $[0, 2]$ , la

limite L vérifie  $f(L) = L \Leftrightarrow \frac{3L+2}{L+2} = L \Leftrightarrow 3L+2 = L(L+2) \Leftrightarrow L^2 - L - 2 = 0$ . En calculant son discriminant, on

résout cette équation. On trouve  $L = -1$  ou 2. Puisque pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 < u_n < 2$ , la limite ne peut être que  $\boxed{L = 2}$

### Exercice n°10

1) De l'égalité  $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$ , on en déduit  $1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$ . Ainsi,  $u_0 = 2 \cos \theta$ ,

$$\text{puis } u_1 = \sqrt{2+u_0} = \sqrt{2+2 \cos \theta} = \sqrt{2(1+\cos \theta)} = \sqrt{2} \sqrt{1+\cos \theta} = \sqrt{2} \sqrt{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} = 2 \sqrt{\cos^2 \frac{\theta}{2}} = 2 \left| \cos \frac{\theta}{2} \right|$$

Puisque  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ , on aura  $0 \leq \frac{\theta}{2} \leq \frac{\pi}{4}$  donc  $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \geq 0$ , et ainsi  $\left| \cos \frac{\theta}{2} \right| = \cos \frac{\theta}{2}$  donc  $u_1 = 2 \cos \frac{\theta}{2}$

$$\text{Ensuite } u_2 = \sqrt{2+u_1} = \sqrt{2+2 \cos \frac{\theta}{2}} = \sqrt{2\left(1+\cos \frac{\theta}{2}\right)} = \sqrt{2} \sqrt{1+\cos \frac{\theta}{2}} = \sqrt{2} \sqrt{2 \cos^2 \frac{\theta}{2^2}} = 2 \sqrt{\cos^2 \frac{\theta}{2^2}} = 2 \left| \cos \frac{\theta}{2^2} \right|$$

Puisque  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ , on aura  $0 \leq \frac{\theta}{2^2} \leq \frac{\pi}{8}$  donc  $\cos\left(\frac{\theta}{2^2}\right) \geq 0$ , et ainsi  $\left| \cos \frac{\theta}{2^2} \right| = \cos \frac{\theta}{2^2}$  donc  $u_2 = 2 \cos \frac{\theta}{2^2}$

$$\text{Enfin, } u_3 = \sqrt{2+u_2} = \sqrt{2+2 \cos \frac{\theta}{2^2}} = \sqrt{2\left(1+\cos \frac{\theta}{2^2}\right)} = \sqrt{2} \sqrt{1+\cos \frac{\theta}{2^2}} = \sqrt{2} \sqrt{2 \cos^2 \frac{\theta}{2^3}} = 2 \sqrt{\cos^2 \frac{\theta}{2^3}} = 2 \left| \cos \frac{\theta}{2^3} \right|$$

Puisque  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ , on aura  $0 \leq \frac{\theta}{2^3} \leq \frac{\pi}{16}$  donc  $\cos\left(\frac{\theta}{2^3}\right) \geq 0$ , et ainsi  $\left| \cos \frac{\theta}{2^3} \right| = \cos \frac{\theta}{2^3}$  donc  $u_3 = 2 \cos \frac{\theta}{2^3}$

2) Montrons par récurrence, que pour tout entier naturel  $n$ , on a  $u_n = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$

Notons  $Q_n$  la propriété «  $u_n = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$  ». La propriété est vraie pour  $n = 0, 1, 2, 3$  d'après les calculs ci-dessus

Supposons la propriété  $Q_p$  vraie pour un certain entier  $p \in \mathbb{N}$ , c'est-à-dire  $u_p = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2^p}\right)$

Alors, puisque  $1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$ , on calcule :

$$u_{p+1} = \sqrt{2+u_p} = \sqrt{2+2 \cos \frac{\theta}{2^p}} = \sqrt{2\left(1+\cos \frac{\theta}{2^p}\right)} = \sqrt{2} \sqrt{1+\cos \frac{\theta}{2^p}} = \sqrt{2} \sqrt{2 \cos^2 \frac{\theta}{2^{p+1}}} = 2 \sqrt{\cos^2 \frac{\theta}{2^{p+1}}} = 2 \left| \cos \frac{\theta}{2^{p+1}} \right|$$

Puisque  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ , on aura  $0 \leq \frac{\theta}{2^{p+1}} \leq \frac{\pi}{2^p}$  donc  $\cos\left(\frac{\theta}{2^{p+1}}\right) \geq 0$ , et ainsi  $\left| \cos \frac{\theta}{2^{p+1}} \right| = \cos \frac{\theta}{2^{p+1}}$  donc  $u_{p+1} = 2 \cos \frac{\theta}{2^{p+1}}$

C'est la propriété  $Q_{p+1}$ , qui achève la phase d'hérédité, et la démonstration par récurrence.

3) Puisque  $2 > 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\theta}{2^n} = 0$

4) Par composition avec la fonction cosinus qui est continue en 0, on trouve  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right) = \cos(0) = 1$ , c'est-à-dire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right) = 2. \text{ Ainsi } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2}$$

### Exercice n°11

1) Démontrons par récurrence sur  $n$  que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ . Notons  $P(n)$  la propriété «  $u_n > 0$  »

Initialisation : La propriété est vraie pour  $n=0$  d'après l'énoncé.

Hérédité : Supposons maintenant que  $P(k)$  soit vraie pour un certain entier  $k > 0$ . Alors :

$$u_k > 0 \Rightarrow \frac{3}{u_k} > 0 \Rightarrow u_k + \frac{3}{u_k} > 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \left( u_k + \frac{3}{u_k} \right) > 0, \text{ c'est-à-dire } u_{k+1} > 0. \text{ Ainsi } P(k) \Rightarrow P(k+1). \text{ L'hérédité est ainsi}$$

démontrée. En conclusion, la propriété  $P(n)$  est vraie  $\forall n \in \mathbb{N}$

Pour que la suite soit stationnaire, il est nécessaire et suffisant que  $u_0 = \sqrt{3}$ .

En effet, supposons que  $u_0 = \sqrt{3}$ . Montrons alors que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sqrt{3}$ . Par récurrence sur  $n$ , la propriété est vraie, par hypothèse, pour  $n=0$ , et si on suppose que  $u_k = \sqrt{3}$  pour une valeur de  $k$  donnée, alors

$$u_{k+1} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{3} + \frac{3}{\sqrt{3}} \right) = \frac{1}{2} (\sqrt{3} + \sqrt{3}) = \sqrt{3}, \text{ ce qui achève la phase d'hérédité et la démonstration par récurrence.}$$

Réciproquement, si la suite est stationnaire, cela signifie que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = 0$ .

$$\text{Or } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} \left( u_n + \frac{3}{u_n} \right) - u_n = -\frac{1}{2} u_n + \frac{3}{2u_n} = \frac{-u_n^2 + 3}{2u_n}. \text{ Ainsi si la suite est stationnaire, cela entraîne que}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = 0 \Leftrightarrow u_n = \sqrt{3}. \text{ En particulier, pour } n=0, u_0 = \sqrt{3}$$

En conclusion, seule la valeur  $u_0 = \sqrt{3}$  rend la suite stationnaire

$$2) \text{ a) } \forall n \in \mathbb{N}, \text{ on calcule } u_{n+1} - \sqrt{3} = \frac{1}{2} \left( u_n + \frac{3}{u_n} \right) - \sqrt{3} = \frac{1}{2u_n} \left[ (u_n^2 + 3) - 2\sqrt{3}u_n \right] = \frac{1}{2u_n} \left[ (u_n - \sqrt{3})^2 \right]$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \text{ on calcule } u_{n+1} + \sqrt{3} = \frac{1}{2} \left( u_n + \frac{3}{u_n} \right) + \sqrt{3} = \frac{1}{2u_n} \left[ (u_n^2 + 3) + 2\sqrt{3}u_n \right] = \frac{1}{2u_n} \left[ (u_n + \sqrt{3})^2 \right]$$

$$\text{b) } \forall n \geq 1, \text{ on reprend le calcul de } u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} \left( u_n + \frac{3}{u_n} \right) - u_n = -\frac{1}{2} u_n + \frac{3}{2u_n} = \frac{-u_n^2 + 3}{2u_n}$$

D'après la question précédente,  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - \sqrt{3} = \frac{1}{2u_n} \left[ (u_n - \sqrt{3})^2 \right]$ . Puisque  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$  (question 1) et

$(u_n - \sqrt{3})^2 \geq 0$ , on en déduit que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq \sqrt{3}$ . De plus, cette inégalité est en fait stricte car s'il existe un indice  $k$

tel que  $u_k = \sqrt{3}$ , alors pour tout  $n \geq k$ , on aurait  $u_n = \sqrt{3}$  (démonstration par récurrence de la question 1). La suite serait donc stationnaire à partir d'un certain rang, ce qui est exclu puisque  $u_0 = 1 \neq \sqrt{3}$ . En conclusion,  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > \sqrt{3}$ , ce

qui se réécrit  $\forall n \geq 1, u_n > \sqrt{3} \Rightarrow 3 - u_n^2 < 0$ . Ainsi  $\forall n \geq 1, u_{n+1} - u_n < 0 \Leftrightarrow u_{n+1} < u_n$ , ce qui assure la décroissance de la

suite pour  $\forall n \geq 1$ .

c) La suite est décroissante pour  $\forall n \geq 1$  et minorée par  $\sqrt{3}$  (puisque  $\forall n \geq 1, u_n > \sqrt{3}$ ) donc converge vers une limite  $l$

qui vérifie  $l = \frac{1}{2} \left( l + \frac{3}{l} \right) \Leftrightarrow l = \frac{3}{l} \Leftrightarrow l^2 = 3$ . Des deux solutions de cette équation ( $l = -\sqrt{3}$  ou  $l = \sqrt{3}$ ), seule la deuxième

est possible car  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ , donc nécessairement,  $l \geq 0$ . Ainsi, la suite converge vers  $\sqrt{3}$

$$3) \text{ a) } \forall n \in \mathbb{N}, \text{ on calcule } v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - \sqrt{3}}{u_{n+1} + \sqrt{3}} = \frac{\frac{1}{2u_n} \left[ (u_n - \sqrt{3})^2 \right]}{\frac{1}{2u_n} \left[ (u_n + \sqrt{3})^2 \right]} = \frac{(u_n - \sqrt{3})^2}{(u_n + \sqrt{3})^2} = \left( \frac{u_n - \sqrt{3}}{u_n + \sqrt{3}} \right)^2 = v_n^2$$

Démontrons par récurrence que  $\forall n \geq 1, v_n = (v_1)^{2^{n-1}}$ .

La propriété est vraie pour  $n=1$ , puisque  $(v_1)^{2^{1-1}} = (v_1)^{2^0} = (v_1)^1 = v_1$ . Supposons que pour un entier  $k \geq 1$  fixé, on ait  $v_k = (v_1)^{2^{k-1}}$ , alors puisque  $v_{k+1} = v_k^2$ , on aura  $v_{k+1} = (v_k)^2 = \left( (v_1)^{2^{k-1}} \right)^2 = (v_1)^{2^{k-1} \times 2} = (v_1)^{2^{k-1+1}} = (v_1)^{2^k}$ , ce qui achève la phase d'hérédité, et la démonstration par récurrence.

**b)** Puisque  $v_1 = \frac{u_0 - \sqrt{3}}{u_0 + \sqrt{3}} = \frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$ , on a  $-1 < v_1 < 1$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_1)^{2^{n-1}} = 0$ , c'est-à-dire  $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0}$ . En utilisant

l'expression de la suite  $v$  en fonction de la suite  $u$ , on a donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n - \sqrt{3}}{u_n + \sqrt{3}} = 0$ . Mais puisque  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n + \sqrt{3} > 0$ , on a

l'équivalence  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n - \sqrt{3}}{u_n + \sqrt{3}} = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - \sqrt{3} = 0$  et on retrouve bien  $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{3}}$ .

### Exercice n°12

**1) a)** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on calcule

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + 3v_n) - \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) = \frac{1}{12}(3u_n + 9v_n) - \frac{1}{12}(4u_n + 8v_n) \\ &= \frac{1}{12}[(3u_n + 9v_n) - (4u_n + 8v_n)] = \frac{1}{12}[3u_n + 9v_n - 4u_n - 8v_n] = \frac{1}{12}[-u_n + v_n] = \frac{1}{12}w_n \end{aligned}$$

La suite  $w$  est donc une suite géométrique de raison  $\frac{1}{12}$  et de premier terme  $w_0 = v_0 - u_0 = 11$

Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $w_n = 11 \times \left(\frac{1}{12}\right)^n$ , ce qui assure que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $w_n > 0$

**b)** Puisque  $-1 < \frac{1}{12} < 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{12}\right)^n = 0$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$

**2) a)** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) - u_n = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) - \frac{3}{3}u_n = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n - 3u_n) = \frac{1}{3}(2v_n - 2u_n) = \frac{2}{3}w_n$

Puisque pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $w_n > 0$ , on en déduit que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} - u_n > 0 \Leftrightarrow u_{n+1} > u_n$ . La suite  $u$  est donc (strictement) croissante

**b)** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{4}(u_n + 3v_n) - v_n = \frac{1}{4}(u_n + 3v_n) - \frac{4}{4}v_n = \frac{1}{4}(u_n + 3v_n - 4v_n) = \frac{1}{4}(u_n - v_n) = -\frac{1}{4}w_n$

Puisque pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $w_n > 0$ , on en déduit que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_{n+1} - v_n < 0 \Leftrightarrow v_{n+1} < v_n$ . La suite  $v$  est donc (strictement) décroissante

**c)** Puisque la suite  $u$  est croissante, tous les termes  $u_n$  sont supérieurs ou égaux au premier terme  $u_0$

Puisque la suite  $v$  est décroissante, tous les termes  $v_n$  sont inférieurs ou égaux au premier terme  $v_0$

Enfin, puisque pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $w_n \geq 0$ , ceci se traduit par l'inégalité  $u_n \leq v_n$

Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $\boxed{u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0}$

**3)** Puisque la suite  $u$  est croissante, la suite  $v$  est décroissante, et puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$ , les deux suites  $u$  et  $v$  sont adjacentes, donc sont convergentes vers une même limite  $l$

**4) a)** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on calcule :

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= 3u_{n+1} + 8v_{n+1} = 3 \times \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) + 8 \times \frac{1}{4}(u_n + 3v_n) = u_n + 2v_n + 2(u_n + 3v_n) \\ &= u_n + 2v_n + 2u_n + 6v_n = 3u_n + 8v_n = t_n \end{aligned}$$

La suite  $(t_n)$  est donc constante. Cette constante est égale à son premier terme !

On calcule  $t_0 = 3u_0 + 8v_0 = 3 \times 1 + 8 \times 12 = 99$

Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $t_n = 99$

**b)** Puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$ , on en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{3u_n + 8v_n}_{t_n} = 3l + 8l = 11l$  donc  $11l = 99 \Leftrightarrow \boxed{l = 9}$

