Exercice1 : 2points) **Questions de cours :**

1) Donner deux méthodes pour factoriser une expression
2) Donner tous les ensembles de nombres que vous connaissez en précisant leurs éléments

Solution : 1) Factoriser signifie : transformer une somme en un produit

Il y'a deux méthodes fondamentaux pour *Factoriser une expression littérale* **:**

a) chercher un facteur commun évident ou non
b) utiliser les identités remarquables

2) $\mathbb{N}$: L'ensemble des nombres entiers naturels
$\mathbb{Z}$ **:** L'ensemble des nombres entiers relatifs
$\mathbb{D}$: L'ensemble des nombres décimaux
$\mathbb{Q}$ **:** L'ensemble des nombres rationnels.
$\mathbb{R}$ **:** L'ensemble des nombres réels.

Exercice2 : Soit $n \in \mathbb{N}$ on pose : $a = 6n+1$;

$b = 12n^2 + 2$; $c = n^2 + n$ $d = n^2 + 7n + 20$;

$e = 2^{n+3} - 2^{n+1}$; $f = 3\times 2^{n+1} + 5\times 2^n$

1) Etudier la parité des nombres : a ; b ; c et d
2) Montrer que : $a+b$ est un multiple de 3
3) Montrer que : a) e est un multiple de 3
b) Montrer que : f est un multiple de 11
4) décomposer en produit de facteurs premiers
Les nombres e et f
5) en déduire $e \wedge f$ et $e \vee f$

Solution : 1) $a = 6n+1 = 2\times 3n+1 = 2\times k+1$
Avec : $k = 3n$ donc : a est impair

$b = 12n^2 + 2 = 2(6n^2+1) = 2k$ Avec : $k = 6n^2 + 1$

Donc : b est pair

On a : $c = n^2 + n = n(n+1)$ donc c est pair

Car : $n(n+1)$ est le produit de Deux nombres consécutifs donc pair

$d = n^2 + 7n + 20 = n^2 + n + 6n + 20 = n(n+1) + 2(3n+10)$

$n(n+1)$ est le produit de Deux nombres consécutifs donc est un nombre pair

$n^2 + 7n + 20 = 2k + 2k' + 1 = 2(k+k') = 2k''$

Donc $n^2 + 7n + 20$ est un nombre pair

2) Montrons que : $a+b$ est un multiple de 3

$a + b = 6n + 1 + 12n^2 + 2 = 6n + 12n^2 + 3 = 3(2n + 4n^2 + 1)$

On pose : $k = 2n + 4n^2 + 1$
On trouve : $a + b = 3\times k$
Donc : $a+b$ est un multiple de 3

3)a)montrons que : e est un multiple de 3

$e = 2^{n+3} - 2^{n+1} = 2^n \times 2^3 - 2^n \times 2^1 = 2^n \times (2^3 - 2)$

$e = 2^n \times 6 = 2^n \times 3 \times 2 = 3\times k$ avec : $k = 2^n \times 2$
Donc : e est un multiple de 3

b) montrons que : f est un multiple de 11

$f = 3\times 2^{n+1} + 5\times 2^n = 3\times 2^n \times 2^1 + 5\times 2^n$

$f = 2^n(3\times 2^1 + 5) = 2^n \times 11 = 11\times k$ avec $k = 2^n$

Donc : f est un multiple de 11

4) décomposions en produit de facteurs premiers les nombres e et f :

$e = 2^n \times 3 \times 2 = 2^n \times 2 \times 3 = 2^{n+1} \times 3$

Donc : $e = 2^{n+1} \times 3$

On a trouvé que : $f = 2^n \times 11$ c'est la bonne décomposions.

5) déduction de : $e \wedge f$ et $e \vee f$

On a : $e = 2^{n+1} \times 3$ et $f = 2^n \times 11$

On sait que : Le PGCD est le produit des facteurs communs munis du plus petit des exposants trouvés dans la décomposition de e et f .

Donc : $e \wedge f = 2^n$

On sait que : Le PPCM est le produit des facteurs communs munis du plus grand des exposants trouvés dans la décomposition de e et f .

Donc : $e \vee f = 2^{n+1} \times 3 \times 11 = 2^{n+1} \times 33$

Exercice3 : Est-ce que les nombres suivants sont premiers ? Justifier votre réponse ?

1 ; 49 ; 653 ; 667 ; 500000103

Solution : 1)

1)1 n'est pas premier car il n'a qu'un seul diviseur : 1

2)49 n'est pas premier car 7 divise 49 ($49=7\times7$)

3) Est ce que 653 est premier ? on utilise une technique :
On cherche les les nombres premiers p qui vérifient :

$p^2 \leq 653$

Les nombres sont : 2 ;3 ;5 ;7 ;11 ;13;17 ;19 ;23
Car : $23^2=529$ et $29^2=841$
et aucun ne divise 653 Donc 653 est premier

4) 667 n'est pas premier car 23 divise 667 ($667=23\times29$)

5) 500000103 n'est pas premier car la somme des chiffres est un multiple de 3 donc 3 divise 500000103

Exercice4: déterminer le chiffre x pour que le nombre : $23x4x$ Soit divisible par 3 et un nombre impair
(Déterminer tous les nombres possibles)

Solutions : on a $0\leq x\leq9$

le nombre : $23x4x$ est impair donc : $x\in\{1;3;5;7;9\}$

le nombre : $23x4x$ est divisible par 9 ssi :
$2+3+x+4+x=3k$ cad un multiple de 3
Donc : $9+2x=3k$

Donc : on donnant a x les valeurs $\{1;3;5;7;9\}$ on trouve que

$x=3$ ou $x=9$ donc les nombres possibles sont :
23343 et 23949

Exercice5: soit n est un nombre entier naturel impair

1) montrer que : n^2-1 est un multiple de 8

2) en déduire que : n^4-1 est un multiple de 16

Solution :1) n *est impair* donc : $n=2k+1$

Donc : $n^2-1=(2k+1)^2-1=(2k)^2+2\times2k\times1+(1)^2-1$

$n^2-1=4k^2+4k+1-1=4k^2+4k=4k(k+1)$

Or $k(k+1)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc

est un nombre pair : donc : $k(k+1)=2k'$

Donc : $n^2-1=8k'$

Donc : n^2-1 est un multiple de 8

Or $k(k+1)$ est le produit de deux nombres consécutifs donc

est un nombre pair donc : $k(k+1)=2k'$

Donc : $n^2-1=8k'$

Donc : n^2-1 est un multiple de 8

2) $n^4-1=(n^2)^2-1^2=(n^2-1)(n^2+1)$

Et *on a trouvé que:* $n^2-1=4k'$
Et *on a :*

$n^2+1=4k^2+4k+1+1=4k^2+4k+2=4(k^2+k+1)=4\times k''$

Donc : $n^4-1=(n^2-1)(n^2+1)=(4k')(4k'')=16k'''$

Donc : n^4-1 est un multiple de 16

Exercice6 : ABC un triangle et E et F deux points tels que : $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{AC}$

1) faite une figure

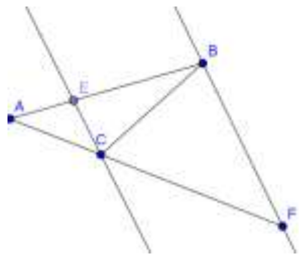
2) écrire les vecteurs : $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{BF}$ en fonction de :

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

3) montrer que $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont colinéaires

4) que peut-on déduire des droites (BF) et (EC)?

Solution :*1)*



2) *on a* $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AC}$
(relation de Chasle)

Donc : $\overrightarrow{EC}=-\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AC}$

Donc : $\overrightarrow{EC}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

On a : $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}$ (relation de Chasle)

Donc : $\overrightarrow{BF}=-\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$

3)on a : $\overrightarrow{EC}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{EC}=\frac{1}{3}\left(-\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}\right)$

Donc : $\overrightarrow{EC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BF}$

Donc : $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont colinéaires

4) on a : $\overrightarrow{EC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BF}$

Donc : les droites (BF) et (EC) sont parallèles

Exercice7. Soit ABCD un parallélogramme et E et F sont deux points tels que : $\overrightarrow{DE}=\frac{5}{2}\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{DF}=\frac{5}{3}\overrightarrow{DC}$

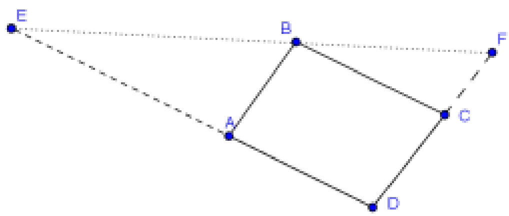
1) Faire une figure   et montrer que : $\overrightarrow{BE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{AB}$ et que : $\overrightarrow{BF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}$

2) a)Exprimer le vecteur $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BF}$ en fonction de :

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

b) vérifier que : $2\overrightarrow{BE}+3\overrightarrow{BF}=\vec{0}$ et En déduire que : Les points E , F et B sont alignés

Solution 1) La figure :



On a : $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\frac{5}{2}\overrightarrow{DA}$

$=-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DA}+\frac{5}{2}\overrightarrow{DA}$

Donc $\boxed{\overrightarrow{BE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{AB}}$

On a : $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\frac{5}{3}\overrightarrow{DC}$

$=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{DC}+\frac{5}{3}\overrightarrow{DC}$

Donc $\boxed{\overrightarrow{BF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}}$

2)a) Expression de : $\overrightarrow{BE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$?

On a : $\overrightarrow{BE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{AB}$ donc : $\overrightarrow{BE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AB}$ car :

$\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CB}$(ABCD un parallélogramme)

Donc : $\overrightarrow{BE}=-\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right)$

Par suite : $\boxed{\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}}$ (1)

Expression de $\overrightarrow{BF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$?

On a : $\overrightarrow{BF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}$

Donc : $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

Donc : $\overrightarrow{BF}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

Par suite : $\boxed{\overrightarrow{BF}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}$ (2)

2°b) vérifions que : $2\overrightarrow{BE}+3\overrightarrow{BF}=\vec{0}$

$2\overrightarrow{BE}+3\overrightarrow{BF}=2(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{2}\overrightarrow{AC})+3\left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$

$=\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

4) Déduisons que : Les points E , F et B sont alignés ?

On a : $2\overrightarrow{BE}+3\overrightarrow{BF}=\vec{0}$ donc : $2\overrightarrow{BE}=-3\overrightarrow{BF}$

Donc : $\overrightarrow{BE}=\frac{-3}{2}\overrightarrow{BF}$ par suite Les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont colinéaires

D'où Les points E , F et B sont alignés

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien

http://www.xriadiat.com/

PROF : ATMANI NAJIB