Les Transformations du plan

Exercice 1 :

$ABCD$ un losange de centre O et I le milieu du segment $[AB]$
et J le milieu du segment $[AD]$

1)faite une figure

2)Déterminer $S_O(A)$ et $S_O(B)$ et $S_O(O)$ et $S_O((AB))$

3)Déterminer $S_{(AC)}(B)$ et $S_{(AC)}(A)$ et $S_{(AC)}(O)$ et $S_{(AC)}([AB])$ et $S_{(AC)}(I)$ et $S_{(AC)}((OI))$

4)Déterminer $t_{\overrightarrow{BC}}(A)$ et $t_{\overrightarrow{IJ}}(B)$ et $t_{\overrightarrow{IJ}}([OB])$

Solution :

2) $S_O(A)=C$ Car $OA=OC$

$S_O(B)=D$ Car $OB=OD$

$S_O(O)=O$ Car O est invariant

On a $\begin{cases} S_O(A)=C \\ S_O(B)=D \end{cases}$ donc $S_O((AB))=(CD)$

Et on a $(AB)\parallel(CD)$ car L'image d'une droite par une symétrie centrale est une droite qui lui est parallèle.

3)

- $S_{(AC)}(B)=D$ car (AC) est la médiatrice du segment $[BD]$
- $S_{(AC)}(A)=A$ car tous les points de la droite (AC) sont invariants
- $S_{(AC)}(O)=O$ car $O\in(AC)$ et tous les points de la droite (AC) sont invariants
- On a $\begin{cases} S_{(AC)}(A)=A \\ S_{(AC)}(B)=D \end{cases}$ donc $S_{(AC)}([AB])=[AD]$
- On a I le milieu du segment $[AB]$ et $S_{(AC)}([AB])=[AD]$ donc $S_{(AC)}(I)$ est le milieu du segment $[AD]$ donc c'est J donc $S_{(AC)}(I)=J$
- On a $\begin{cases} S_{(AC)}(O)=O \\ S_{(AC)}(I)=J \end{cases}$ donc $S_{(AC)}((OI))=(OJ)$

4)

- On a $ABCD$ un losange donc $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ donc $t_{\overrightarrow{BC}}(A)=D$
- On a ABD un triangle et I le milieu du segment $[AB]$ et J le milieu du segment $[AD]$

Donc $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{IJ}$ et on a O le milieu du segment $[BD]$

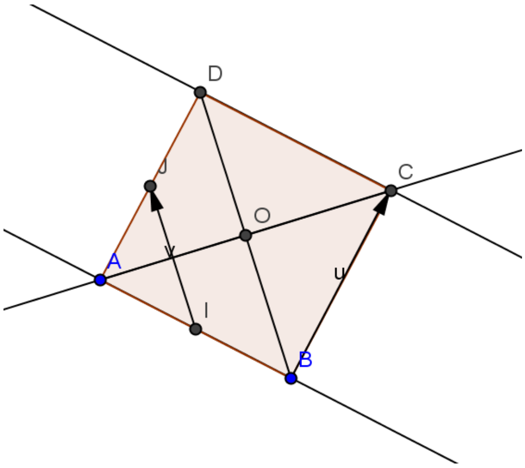
donc $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{BO}$

Alors $2\overrightarrow{BO}=2\overrightarrow{IJ}$ par suite $\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{IJ}$ donc $t_{\overrightarrow{IJ}}(B)=O$

- On a $\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{IJ}$ et O le milieu du segment $[BD]$

donc $\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OD}$

Donc $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{IJ}$ c a d $t_{\overrightarrow{IJ}}(O)=D$ et on a $t_{\overrightarrow{IJ}}(B)=O$ donc



$t_{\overrightarrow{IJ}}([OB])=[DO]$

Exercice 2:
Écrire l'expression vectorielle suivante $\overrightarrow{IC}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{IB}$ en utilisant une homothétie

Solution :

Soit l'homothétie $h_{\left(I,-\frac{2}{3}\right)}$

$\overrightarrow{IC}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{IB}$ ssi $h(B)=C$

Exercice 3 :
Écrire les expressions vectorielles suivantes en utilisant une homothétie

$2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ Avec I un point donné

$2\overrightarrow{\Omega B}=-\overrightarrow{BA}$ Avec Ω un point donné

$3\overrightarrow{IA}-5\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ Avec I un point donné

Solution : $h(I,k)$:

1) $h(A)=B$ ssi $\overrightarrow{IB}=k\overrightarrow{IA}$

$2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ ssi $2\overrightarrow{IA}+3\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}\right)=\vec{0}$ ssi

$2\overrightarrow{IA}-3\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ ssi $-\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

Ssi $\overrightarrow{IB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$ donc $h\left(I,\frac{1}{3}\right)$

2) $2\overrightarrow{\Omega B}=-\overrightarrow{BA}$ ssi $2\overrightarrow{\Omega B}=\overrightarrow{A\Omega}+\overrightarrow{\Omega B}$ ssi
$2\overrightarrow{\Omega B}-\overrightarrow{\Omega B}=-\overrightarrow{\Omega A}$ ssi $2\overrightarrow{\Omega B}=\overrightarrow{AB}$ ssi $\overrightarrow{\Omega B}=-\overrightarrow{\Omega A}$
donc $h(\Omega,-1)$

3) $3\overrightarrow{IA}-5\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ ssi $3\overrightarrow{IA}-5\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}\right)=\vec{0}$ ssi

$3\overrightarrow{IA}-5\overrightarrow{AI}-5\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ ssi $3\overrightarrow{IA}+5\overrightarrow{IA}-5\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

Ssi $8\overrightarrow{IA}=5\overrightarrow{IB}$ ssi $\overrightarrow{IB}=\frac{8}{5}\overrightarrow{IA}$ donc $h\left(I,\frac{8}{5}\right)$

Exercice 4 : $ABCD$ un parallélogramme et I et J deux points tq $\overrightarrow{CI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{DC}$

1)faite une figure

2)Monter que la droite (BJ) est l'image de la droite (AI) par la translation $t_{\overrightarrow{AB}}$ et que peut-on en déduire pour les droites (BJ) et (AI) ?

3)Soit l'homothétie h de centre I qui transforme le point B en C

a) Montrer que $h((AB))=(CD)$

a) Montrer que le rapport k de l'homothétie est $k=-2$

4)Soit le point K tq $\overrightarrow{KI}=2\overrightarrow{AB}$

a) Montrer que $h(J)=K$

b) Montrer que $AI=\frac{1}{2}CK$

Solution :

1)La figure

2) $t_{\overrightarrow{AB}}(I)=J$ ؟؟؟؟؟

On a $ABCD$ parallélogramme donc $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$

Et on a $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{DC}$ donc $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AB}$ c a d $t_{\overrightarrow{AB}}(I)=J$

On a $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}$ donc $t_{\overrightarrow{AB}}(A)=B$

On donc $\begin{cases} t_{\overrightarrow{AB}}(I)=J \\ t_{\overrightarrow{AB}}(A)=B \end{cases}$ alors $t_{\overrightarrow{AB}}((AI))=(BJ)$

Déduction : on sait que L'image d'une droite par une translation est une droite qui lui est parallèle donc $(AI)\parallel(BJ)$

3)a) on a $h(B)=C$ et on sait que L'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle et donc passe par l'image de B c a d C donc $h((AB))=(CD)$

3)b) on a $h(B)=C$ donc $\overrightarrow{IC}=k\overrightarrow{IB}$

Et on sait que $\overrightarrow{CI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ donc $3\overrightarrow{CI}=2\overrightarrow{CB}$ donc

$3\overrightarrow{CI}=2\left(\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{IB}\right)$ donc $3\overrightarrow{CI}=2\overrightarrow{CI}+2\overrightarrow{IB}$

Donc $3\overrightarrow{CI}-2\overrightarrow{CI}=2\overrightarrow{IB}$ donc $\overrightarrow{CI}=2\overrightarrow{IB}$ donc

$\overrightarrow{IC}=-2\overrightarrow{IB}$

Donc $k=-2$

4)a) $h(J)=K$ ؟؟؟؟؟

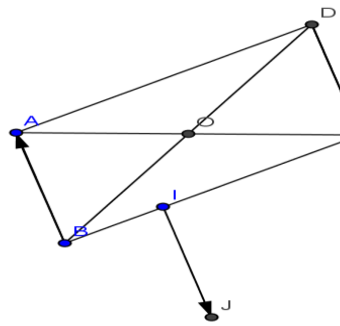
On a $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{DC}$ et on a $\overrightarrow{KI}=2\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{KI}=2\overrightarrow{IJ}$ donc $\overrightarrow{IK}=-2\overrightarrow{IJ}$ donc $h(J)=K$

4)b) on a $\begin{cases} h(J)=K \\ h(B)=C \end{cases}$ donc $\overrightarrow{CK}=-2\overrightarrow{BJ}$ d'après la propriété caractéristique de l'homothétie

Donc $\left\|\overrightarrow{CK}\right\|=\left\|-2\overrightarrow{BJ}\right\|$ donc $\left\|\overrightarrow{CK}\right\|=|-2|\left\|\overrightarrow{BJ}\right\|$ donc

$CK=2BJ$

Et on a



$\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AB}$ donc $ABJI$ parallélogramme donc $BJ=AI$

Donc $CK=2AI$ donc $AI=\frac{1}{2}CK$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien